IEC 61649

Edition 2.0 2008-08

INTERNATIONAL STANDARD

NORME INTERNATIONALE

Weibull analysis

Analyse de Weibull

IEC 61649:2008

IEC Central Office
3, rue de Varembé
CH-1211 Geneva 20
Switzerland
Email: inmail@iec.ch
Web: www.iec.ch

About the IEC

The International Electrotechnical Commission (IEC) is the leading global organization that prepares and publishes International Standards for all electrical, electronic and related technologies.

About IEC publications

The technical content of IEC publications is kept under constant review by the IEC. Please make sure that you have the latest edition, a corrigenda or an amendment might have been published.

- Catalogue of IEC publications: www.iec.ch/searchpub
The IEC on-line Catalogue enables you to search by a variety of criteria (reference number, text, technical committee,…). It also gives information on projects, withdrawn and replaced publications.
- IEC Just Published: www.iec.ch/online_news/justpub
Stay up to date on all new IEC publications. Just Published details twice a month all new publications released. Available on-line and also by email.
- Electropedia: www.electropedia.org
The world's leading online dictionary of electronic and electrical terms containing more than 20 000 terms and definitions in English and French, with equivalent terms in additional languages. Also known as the International Electrotechnical Vocabulary online.
- Customer Service Centre: www.iec.ch/webstore/custserv
If you wish to give us your feedback on this publication or need further assistance, please visit the Customer Service Centre FAQ or contact us:
Email: csc@iec.ch
Tel.: +41 22 919 02 11
Fax: +41 22 919 03 00

A propos de la CEI

La Commission Electrotechnique Internationale (CEI) est la première organisation mondiale qui élabore et publie des normes internationales pour tout ce qui a trait à l'électricité, à l'électronique et aux technologies apparentées.

A propos des publications CEI

Le contenu technique des publications de la CEI est constamment revu. Veuillez vous assurer que vous possédez l'édition la plus récente, un corrigendum ou amendement peut avoir été publié.

- Catalogue des publications de la CEI: www.iec.ch/searchpub/cur_fut-f.htm
Le Catalogue en-ligne de la CEI vous permet d'effectuer des recherches en utilisant différents critères (numéro de référence, texte, comité d'études,…). Il donne aussi des informations sur les projets et les publications retirées ou remplacées.
- Just Published CEI: www.iec.ch/online_news/justpub
Restez informé sur les nouvelles publications de la CEI. Just Published détaille deux fois par mois les nouvelles publications parues. Disponible en-ligne et aussi par email.
- Electropedia: www.electropedia.org
Le premier dictionnaire en ligne au monde de termes électroniques et électriques. Il contient plus de 20 000 termes et définitions en anglais et en français, ainsi que les termes équivalents dans les langues additionnelles. Egalement appelé Vocabulaire Electrotechnique International en ligne.
- Service Clients: www.iec.ch/webstore/custserv/custserv_entry-f.htm
Si vous désirez nous donner des commentaires sur cette publication ou si vous avez des questions, visitez le FAQ du Service clients ou contactez-nous:
Email: csc@iec.ch
Tél.: +41 22 919 02 11
Fax: +41 22 919 03 00

IEC 61649

Edition 2.0 2008-08

INTERNATIONAL STANDARD

NORME INTERNATIONALE

Weibull analysis

Analyse de Weibull

INTERNATIONAL
ELECTROTECHNICAL
COMMISSION

COMMISSION
ELECTROTECHNIQUE
INTERNATIONALE

PRICE CODE
CODE PRIX XB

ICS 03.120.01; 03.120.30

ISBN 2-8318-9954-0

CONTENTS

INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION

WEIBULL ANALYSIS

FOREWORD

1) The International Electrotechnical Commission (IEC) is a worldwide organization for standardization comprising all national electrotechnical committees (IEC National Committees). The object of IEC is to promote international co-operation on all questions concerning standardization in the electrical and electronic fields. To this end and in addition to other activities, IEC publishes International Standards, Technical Specifications, Technical Reports, and Guides (hereafter referred to as "IEC Publication(s)"). Their preparation is entrusted to technical committees; any IEC National Committee interested in the subject dealt with may participate in this preparatory work. International, governmental and non-governmental organizations liaising with the IEC also participate in this preparation. IEC collaborates closely with the International Organization for Standardization (ISO) in accordance with conditions determined by agreement between the two organizations.
2) The formal decisions or agreements of IEC on technical matters express, as nearly as possible, an international consensus of opinion on the relevant subjects since each technical committee has representation from all interested IEC National Committees.
3) IEC Publications have the form of recommendations for international use and are accepted by IEC National Committees in that sense. While all reasonable efforts are made to ensure that the technical content of IEC Publications is accurate, IEC cannot be held responsible for the way in which they are used or for any misinterpretation by any end user.
4) In order to promote international uniformity, IEC National Committees undertake to apply IEC Publications transparently to the maximum extent possible in their national and regional publications. Any divergence between any IEC Publication and the corresponding national or regional publication shall be clearly indicated in the latter.
5) IEC provides no marking procedure to indicate its approval and cannot be rendered responsible for any equipment declared to be in conformity with an IEC Publication.
6) All users should ensure that they have the latest edition of this publication.
7) No liability shall attach to IEC or its directors, employees, servants or agents including individual experts and members of its technical committees and IEC National Committees for any personal injury, property damage or other damage of any nature whatsoever, whether direct or indirect, or for costs (including legal fees) and expenses arising out of the publication, use of, or reliance upon, this IEC Publication or any other IEC Publications.
8) Attention is drawn to the Normative references cited in this publication. Use of the referenced publications is indispensable for the correct application of this publication.
9) Attention is drawn to the possibility that some of the elements of this IEC Publication may be the subject of patent rights. IEC shall not be held responsible for identifying any or all such patent rights.

International Standard IEC 61649 has been prepared by IEC technical committee 56: Dependability.

This second edition cancels and replaces the first edition, published in 1997, and constitutes a technical revision.

The main changes with respect to the previous edition are as follows:

– the title has been shortened and simplified to read "Weibull analysis";
– provision of methods for both analytical and graphical solutions have been added.

The text of this standard is based on the following documents:

FDIS	Report on voting
56/1269/FDIS	56/1281/RVD

Full information on the voting for the approval of this standard can be found in the report on voting indicated in the above table.

This publication has been drafted in accordance with the ISO/IEC Directives, Part 2.

The committee has decided that the contents of this publication will remain unchanged until the maintenance result date indicated on the IEC web site under "http://webstore.iec.ch" in the data related to the specific publication. At this date, the publication will be

- reconfirmed,
- withdrawn,
- replaced by a revised edition, or
- amended.

INTRODUCTION

The Weibull distribution is used to model data regardless of whether the failure rate is increasing, decreasing or constant. The Weibull distribution is flexible and adaptable to a wide range of data. The time to failure, cycles to failure, mileage to failure, mechanical stress or similar continuous parameters need to be recorded for all items. A life distribution can be modelled even if not all the items have failed.

Guidance is given on how to perform an analysis using a spreadsheet program. Guidance is also given on how to analyse different failure modes separately and identify a possible weak population. Using the three-parameter Weibull distribution can give information on time to first failure or minimum endurance in the sample.

WEIBULL ANALYSIS

1 Scope

This International Standard provides methods for analysing data from a Weibull distribution using continuous parameters such as time to failure, cycles to failure, mechanical stress, etc.

This standard is applicable whenever data on strength parameters, e.g. times to failure, cycles, stress, etc. are available for a random sample of items operating under test conditions or in-service, for the purpose of estimating measures of reliability performance of the population from which these items were drawn.

This standard is applicable when the data being analysed are independently, identically distributed. This should either be tested or assumed to be true (see IEC 60300-3-5).

In this standard, numerical methods and graphical methods are described to plot data, to make a goodness-of-fit test, to estimate the parameters of the two- or three-parameter Weibull distribution and to plot confidence limits. Guidance is given on how to interpret the plot in terms of risk as a function of time, failure modes and possible weak population and time to first failure or minimum endurance.

2 Normative references

The following referenced documents are indispensable for the application of this document. For dated references, only the edition cited applies. For undated references, the latest edition of the referenced document (including any amendments) applies.

IEC 60050-191:1990, *International Electrotechnical Vocabulary – Part 191: Dependability and quality of service*

IEC 60300-3-5:2001, *Dependability management – Part 3-5: Application guide – Reliability test conditions and statistical test principles*

IEC 61810-2, *Electromechanical elementary relays – Part 2: Reliability*

ISO 2854:1976, *Statistical interpretation of data – Techniques of estimations and tests relating to means and variances*

ISO 3534-1:2006, *Statistics – Vocabulary and symbols – Part 1: General statistical terms and terms in probability*

3 Terms, definitions, abbreviations and symbols

For the purposes of this document, the definitions, abbreviations and symbols given in IEC 60050-191 and ISO 3534-1 apply, together with the following.

3.1 Terms and definitions

3.1.1
censoring
terminating a test after either a given duration or a given number of failures

NOTE A test terminated when there are still unfailed items may be called a “censored test", and test time data from such tests may be referred to as “censored data”.

3.1.2
suspended item
item upon which testing has been curtailed without relevant failure

NOTE 1 The item may not have failed, or it may have failed in a mode other than that under investigation.

NOTE 2 An “early suspension” is one that was suspended before the first failure. A “late suspension” is suspended after the last failure.

3.1.3
life test
test conducted to estimate or verify the durability of a product

NOTE The end of the useful life will often be defined as the time when a certain percentage of the items have failed for non-repairable items and as the time when the failure intensity has increased to a specified level for repairable items.

3.1.4
non-repairable item
item that cannot, under given conditions, after a failure, be returned to a state in which it can perform as required

NOTE The given conditions may be technical, economic, ecological and/or others.

3.1.5
operating time
time interval for which the item is in an operating state

NOTE ”Operating time” is generic, and should be expressed in units appropriate to the item concerned, e.g. calendar time, operating cycles, distance run, etc. and the units should always be clearly stated.

3.1.6
relevant failure
failure that should be included in interpreting test or operational results or in calculating the value of a reliability performance measure

NOTE The criteria for inclusion should be stated.

3.1.7
reliability test
experiment carried out in order to measure, quantify or classify a reliability measure or property of an item

NOTE 1 Reliability testing is different from environmental testing where the aim is to prove that the items under test can survive extreme conditions of storage, transportation and use.

NOTE 2 Reliability tests may include environmental testing.

3.1.8
repairable item
item that can, under given conditions, after a failure, be returned to a state in which it can perform as required

NOTE The given conditions may be technical, economic, ecological and/or others.

3.1.9
time to failure
operating time accumulated from the first use, or from restoration, until failure

NOTE In applications where the time in storage or on standby is significantly greater than “operating time”, the time to failure may be based on the time in the specified service.

3.1.10
time between failures
time duration between consecutive failures

NOTE 1 The time between failures includes the up time and the down time.

NOTE 2 In applications where the time in storage or on standby is significantly greater than operating time, the time to failure may be based on the time in the specified service.

3.1.11
B life
L percentiles
age at which a given percentage of items have failed

NOTE "B_{10}" life is the age at which 10 % of items (e.g. bearings) have failed. Sometimes it is denoted by the L (life) value. B lives may be read directly from the Weibull plot or determined more accurately from the Weibull equation. The age at which 50 % of the items fail, the B_{50} life, is the median time to failure.

3.2 Abbreviations

ASIC	application specific integrated circuit
BGA	ball grid array
CDF	cumulative distribution function
PDF	probability density function
MLE	maximum likelihood estimation
MRR	median rank regression
MTTF	mean time to failure

3.3 Symbols

t	time – variable
η	Weibull characteristic life or scale parameter
β	Weibull shape parameter
t_0	starting point or origin of the distribution, failure free time
r^2	coefficient of determination
$f(t)$	probability density function
$F(t)$	cumulative distribution function
$h(t)$	hazard function
$\lambda(t)$	instantaneous failure rate
$H(t)$	cumulative hazard function
F_1	number of failures with failure mode 1
F_2	number of failures with failure mode 2
F_3	number of failures with failure mode 3

4 Application of the techniques

Table 1 shows the circumstances in which particular aspects of this standard are applicable. It shows the three main methods for estimating parameters from the Weibull distribution, namely graphical, computational and WeiBayes, and indicates the type of data requirements for each of these three methods.

Table 1 – Guidance for using IEC 61649

Method/ Kinds of data	Graphical methods	Computational methods	WeiBayes
Interval censored	√	NC	√
Multiple censored	√	NC	√
Singly censored	√	√	√
Zero failures	NC	NC	√
Small sample (≤20)	√	NC	√
Large sample	√	√	NC
Curved data	√	NC	NC
Complete data	√	√	√
NOTE NC means not covered in this standard.			

5 The Weibull distribution

5.1 The two-parameter Weibull distribution

The two-parameter Weibull distribution is by far the most widely used distribution for life data analysis. The Weibull probability density function (PDF) is shown in Equation (1):

$$\mathrm{f}(t) = \beta \cdot \frac{t^{\beta - 1}}{\eta^{\beta}} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{1}$$

where

t is the time, expressed as a variable;

η is the characteristic life or scale parameter;

β is the shape parameter.

The Weibull cumulative distribution function (CDF) has an explicit equation as shown in Equation (2):

$$\mathrm{F}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-(t/\eta)^{\beta}} \tag{2}$$

The two parameters are η, the characteristic life, and β, the shape parameter. The shape parameter indicates the rate of change of the instantaneous failure rate with time. Examples include: infant mortality, random or wear-out. It determines which member of the Weibull family of distributions is most appropriate. Different members have widely different shaped PDFs (see Figure 1). The Weibull distribution fits a broad range of life data compared with other distributions. The variable t is generic and can have various measures such as time, distance, number of cycles or mechanical stress applications.

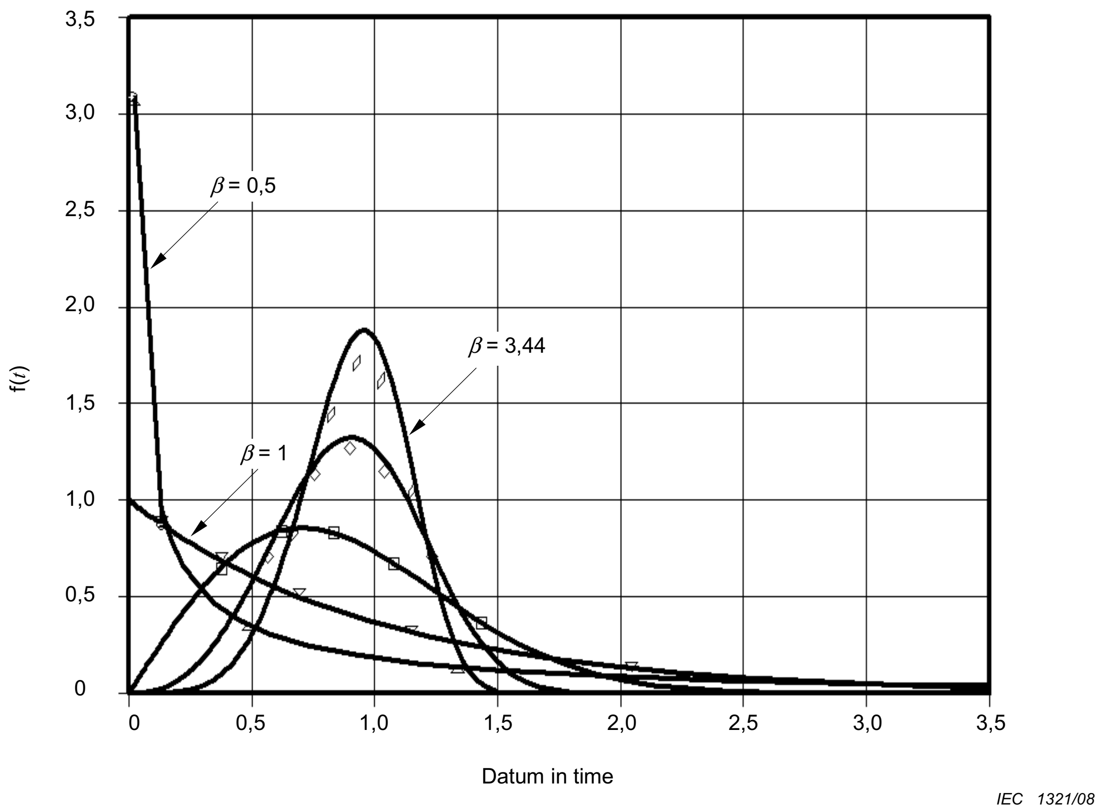


Figure 1 – The PDF shapes of the Weibull family for η = 1,0

From Figure 1, the PDF shape for β = 3,44 (indicated) looks like the normal distribution: it is a fair approximation, except for the tails of the distribution.

The instantaneous failure rate λ(t) (or h(t), the hazard function) of the two-parameter Weibull distribution is shown in Equation (3):

$$\lambda(t) = \mathrm{h}(t) = \beta \cdot \frac{t^{\beta-1}}{\eta^{\beta}} \tag{3}$$

Three ranges of values of the shape parameter, β, are salient:

- for β = 1,0 the Weibull distribution is identical to the exponential distribution and the instantaneous failure rate, λ(t), then becomes a constant equal to the reciprocal of the scale parameter, η ;
- β > 1,0 is the case of increasing instantaneous failure rate; and
- β < 1,0, is the case of decreasing instantaneous failure rate.

Characteristic life, η, is the time at which 63,2 % of the items are expected to fail. This is true for all Weibull distributions, regardless of the shape parameter, β. If there is replacement of items, then 63,2 % of the times to failure are expected to be lower or equal to the characteristic life, η. Further discussion of the issues concerning repair and non-repairable items can be found in IEC 60300-3-5. The 63,2 % comes from setting $t = \eta$ in Equation (2) which results in Equation (4):

$$\mathrm{F}(\eta) = 1 - \mathrm{e}^{-(\eta/\eta)^{\beta}} = 1 - \mathrm{e}^{-(1)^{\beta}} = 1 - (1/\mathrm{e}) = 0{,}632 \tag{4}$$

5.2 The three-parameter Weibull distribution

Equation (5) shows the CDF of the three-parameter Weibull distribution:

$$\mathrm{F}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{t - t_0}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{5}$$

The parameter t_0 is called the failure-free time, location parameter or minimum life.

The effect of location parameter is typically not understood well until a poor fit is observed with a 2-parameter Weibull plot. When a lack of fit is observed, engineers attempt to use other distributions that may provide them with a better fit. However, the lack of fit can be reconciled when the data is plotted with a 3-parameter Weibull distribution (see 8.5). Using the location parameter, it becomes evident that the product failures are offset by a fixed period of time, called the threshold. The effect of location parameter is normally observed when a product sees “shelf-life” after which the first failure occurs. A good indicator of the effect of a location parameter is the convex shape of a plot.

6 Data considerations

6.1 Data types

Life data are related to items that "age" to failure. Weibull failure data are usually life data but may also describe material data where the “aging” may be stress, force or temperature. "Age" may be operating time, starts and stops, landings, takeoffs, low-cycle fatigue cycles, mileage, shelf or storage time, cycles or time at high stress or high temperature, or many other continuous parameters. In this standard the “age” parameter will be called time. When required, “time” can be substituted by any of the “age” parameters listed above.

6.2 Time to first failure

The Weibull “time” variable is usually considered to be a measure of life consumption. The following interpretations can be used:

– time to first failure of a repairable item;

– time to failure of an non-repairable item;

– time from new to each failure of a repairable system if a non-repairable item in the system fails more than once during the period of observation. It has to be assumed that the repair (change of the item) does not introduce a new failure, so that the system after the repair can, with an approximation, be regarded as having the same reliability as immediately before the failure (commonly referred as the “bad as old” assumption);

– time to first failure of a non-repairable item, following scheduled maintenance, with the assumption that the failure is related to the previous maintenance.

6.3 Material characteristics and the Weibull distribution

Material characteristics such as creep, stress rupture or breakage and fatigue are often plotted on Weibull probability paper. Here the horizontal scale may be stress, cycles, load, number of load repetitions or temperature.

6.4 Sample size

Uncertainty with regard to the Weibull parameter estimation is related to the sample size and the number of relevant failures. Weibull parameters can be estimated using as few as two failures; however, the uncertainty of such an estimate would be excessive and could not confirm the applicability of the Weibull model. Whatever the sample size, confidence limits should be calculated and plotted in order to assess the uncertainty of the estimations.

As with all statistical analysis, the more data that is available, the better the estimation but if the data set is limited, then refer to the advice given in 11.3.

6.5 Censored and suspended data

When analysing life data it is necessary to include data on those items in the sample that have not failed, or have not failed by a failure mode analysis. This data is referred to as censored or suspended data (see IEC 60300-3-5). When the times to failure of all items are observed, the data are said to be complete.

An item on test that has not failed by the failure mode in question is a suspension or censored item. It may have failed by a different failure mode or not failed at all. An "early suspension" is one that was suspended before the first failure time. A "late suspension" is suspended after the last failure. Suspensions between failures are called random or progressive suspensions.

If items remain unfailed, then the corresponding data are said to be censored. If a test is terminated at a specified time, T, before all items have failed, then the data are said to be time censored. If a test is terminated after a specified number of failures have occurred, then the data are said to be failure censored.

Further discussion of censoring is covered in IEC 60300-3-5.

7 Graphical methods and goodness-of-fit

7.1 Overview

Graphical analysis consists of plotting the data on Weibull probability paper, fitting a line through the data, interpreting the plot and estimating the parameters using special probability paper derived by transforming the Weibull equation into a linear form. This is illustrated in Annex I.

Data is plotted after first organizing it from earliest to latest, a process called ranking. The time to failure data are plotted as the X coordinate on the Weibull probability paper.

The Y coordinate is the median rank as specified in 7.2.1. For sample sizes above 30 the median rank is, in practice, the same as the per cent of failures. If the plotted data follow a linear trend, a regression line may be drawn.

The parameters may then be read off the plot. The characteristic life, η, is the time to 63,2 % of the items failing, called the “B63,2 Life”. The shape parameter, β, is estimated as the slope on Weibull paper.

Median rank regression (MRR) is a method for estimating the parameters of the distribution using linear regression techniques with the variables being the median rank and lifetime or stress ,etc.

Another graphical method that is used for estimating parameters of a Weibull distribution is called hazard plotting. This is described in 7.3.

7.2 How to make the probability plot

In order to make a probability plot, a sequence of steps needs to be carried out. These steps are described in detail below.

7.2.1 Ranking

To make the Weibull plot, rank the data from the lowest to the highest times to failure. This ranking will set up the plotting positions for the time, t, axis and the ordinate, F(t), in percentage values. These will provide information for the construction of the Weibull line shown in Equation (6).

Median ranks are given in Annex C. Enter as an example the tables for 50 % median rank, for a sample size of five, and find the median ranks shown in Table 2 for five failure times shown in the middle column. The median rank plotting positions in Annex C are used with all types of probability paper, i.e. Weibull, log-normal, normal, and extreme value.

NOTE 1 If two data points have the same time, they are plotted at different median rank values.

Table 2 – Ranked flare failure rivet data

Order number I	Failure time t min (X)	Median rank % (Y)
1	30	12,94
2	49	31,38
3	82	50,00
4	90	68,62
5	96	87,06

The median estimate is preferred to the mean or average value for non-symmetrical distributions. Most life data distributions are skewed and, therefore, the median plays an important role.

If a table of median ranks and a means to calculate median ranks using the Beta distribution is not available, then Benard’s approximation, Equation (6), may be used:

$$F_i = \frac{(i-0,3)}{(N+0,4)}\% \tag{6}$$

where N is the sample size and i is the ranked position of the data item of interest.

NOTE 2 This equation is mostly used for $N \leq 30$; for $N > 30$ the correction of the cumulative frequency can be neglected: $F_i = (i/N) \times 100$ %.

7.2.2 The Weibull probability plot

After transforming the data, the plot can be constructed using three different methods:

– Weibull probability paper – Annex F shows Weibull probability paper;
– a computer spreadsheet program – Annex E gives a spreadsheet example;
– commercial off-the-shelf software.

7.2.3 Dealing with suspensions or censored data

Non-failed items or items that fail by a different failure mode are "censored" or "suspended" items, respectively. These data cannot be ignored. The times on suspended items have to be included in the analysis.

The formula below gives the adjusted ranks without the need for calculating rank increments. It is used for every failure and requires an additional column for reverse ranks. The procedure is to rank the data with the suspensions and to use Equation (7) to determine the ranks, adjusted for the presence of the suspensions.

$$\text{Adjusted rank} = \frac{(\text{Reverse rank}) \text{ x } (\text{Previous adjusted rank}) + (N + 1)}{(\text{Reverse rank}) + 1} \qquad (7)$$

The rank order numbers are adjusted for the effect of the three suspended items in Table 3.

Table 3 – Adjusted ranks for suspended or censored data

Rank	Time	Status	Reverse rank	Adjusted rank	Median rank %
1	10	Suspension	8	Suspended...	
2	30	Failure	7	[7 × 0 +(8+1)]/ (7+1) = 1,125	9,8
3	45	Suspension	6	Suspended...	
4	49	Failure	5	[5 × 1,125 +(8+1)]/ (5+1) = 2,438	25,5
5	82	Failure	4	[4 × 2,438 +(8+1)]/ (4+1) = 3,750	41,1
6	90	Failure	3	[3 × 3,750 +(8+1)]/ (3+1) = 5,063	56,7
7	96	Failure	2	[2 × 5,063 +(8+1)]/ (2+1) = 6,375	72,3
8	100	Suspension	1	Suspended...	

In this example, the adjusted ranks use Benard's approximation to calculate the median ranks as it is easier than interpolating in the table. The results in Table 3 are plotted in Figure 2.

NOTE If two items fail at the same age, they are assigned sequential rank order numbers. In case of later suspension, the procedure is to be repeated for the rest of the failures.

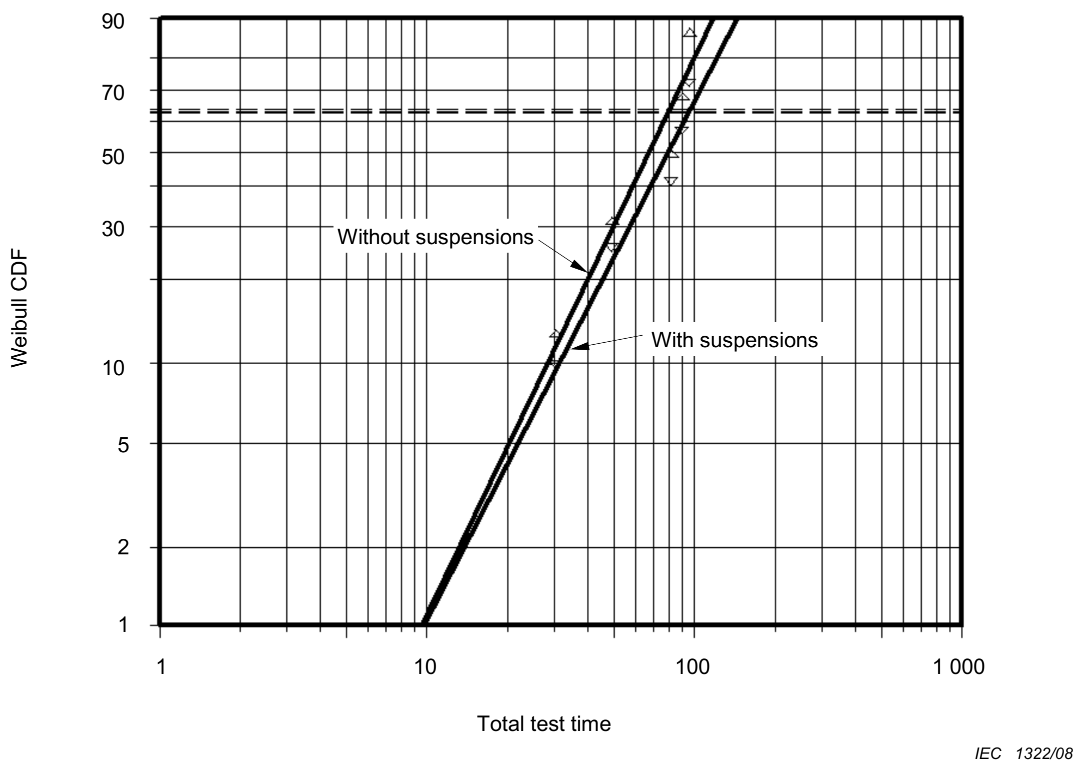


Figure 2 – Total test time (in minutes)

Benard's approximation for the median rank is sufficiently accurate when using suspension for plotting Weibull distributions and estimating the parameters. Here "i" is the adjusted rank and "N" is the sum of failures and suspensions. The median ranks are converted to percentages for plotting on Weibull paper. For example, for the first failure in Table 3 with an adjusted rank of 1,125:

$$Median\,Rank\,(\%) = \frac{(1{,}125 - 0{,}3)}{(8 + 0{,}4)} \times 100 = 9{,}82\% \qquad (8)$$

Figure 2 shows the correct Weibull plot as it includes the suspensions.

The following are the steps to plot data sets with suspensions:

a) rank the times, both failures and suspensions, from earliest to latest;
b) calculate the adjusted ranks for the failures (suspensions are not plotted);
c) use Benard's approximation to calculate the median ranks;
d) plot the failure times (x) versus the median ranks (y) on Weibull paper;
e) estimate η by reading the B63,2 life from the plot;
f) estimate β with a ruler or use special beta scales usually given on the Weibull probability paper;
g) interpret the plot.

7.2.4 Probability plotting

Plotting the data on Weibull paper by hand or on a computer may be sufficient for checking the goodness-of-fit. Subjectively fitting a straight line by eye can give an indication of goodness-of-fit.

7.2.5 Checking the fit

If the data cluster around a straight line on a probability plot, it is evidence that the data is represented by the subject distribution. However, small samples make it difficult to gauge the goodness-of-fit. There are statistical measures of goodness-of-fit such as Chi-squared, Kolmogorov-Smirnoff and Nancy Mann's tests. This standard uses the correlation coefficient squared called the coefficient of determination.

This can be calculated using Equation (9):

$$r^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\left(\bar{x}\right)^2 \right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - N\left(\bar{y}\right)^2 \right)} \qquad (9)$$

where x_i and y_i are the median rank and the failure time, respectively, $\bar{x}$ and $\bar{y}$ are averages of x_i and y_i and N is the sample size.

r^2 is the proportion of variation in the data that can be explained by the Weibull hypothesis. The closer this is to 1, the better the data are fitted to a Weibull distribution; the closer to 0 indicates a poor fit. The correlation coefficient, "r," is intended to measure the strength of a linear relationship between two variables. "r" is a number between -1 and +1, depending on the slope. Alternatively, if the Weibull plot is constructed using a spreadsheet, then when using linear regression techniques the correlation coefficient is often given as part of the output when data are fitted with a straight line (usually a selective option). Similarly, commercial software packages provide the coefficient of determination.

This should be used with care and only if visual inspection concurs with observation.

7.3 Hazard plotting

Weibull probability plotting techniques first estimate the cumulative proportion failed, F*(t)*, using median ranks, and then plot times to failure against respective estimated cumulative probabilities on the Weibull probability paper.

The hazard plotting technique begins with the estimation of the instantaneous failure rate or the hazard function,

$$\lambda(t) = h(t) = \frac{f(t)}{[1-F(t)]} \quad , \tag{10}$$

using an estimate of the cumulative hazard function.

The cumulative hazard function,

$$H(t) = \int_0^t h(t)dt = -\ln\left[1-F(t)\right] \quad , \tag{11}$$

is estimated by the cumulative sum of the estimated hazard functions.

For the Weibull distribution,

$$H(t) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \quad , \tag{12}$$

taking natural logarithms of both sides, yields the following linear relationship for $\ln H(t)$ against ln$t$:

$$\ln(H(t)) = \beta \ln(t) - \beta \ln(\eta) \tag{13}$$

The Weibull hazard paper is therefore ln-ln paper. The nominal slope of the fitted line to the data is β, and $t=\eta$ when $H(t)=1$.

NOTE Either natural logs or base 10 logs can be used for Weibull hazard paper.

Though the Weibull hazard paper is available for some countries, this technique can be used with the usual Weibull probability paper applying the transformation:

$$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-H(t)} \tag{14}$$

This can be very easily implemented using a spreadsheet program.

The hazard plotting procedure is as follows:

a) sort the times, both failures and suspensions simultaneously, from earliest to latest;

b) for each failure, calculate the instantaneous failure rate, given by 1/(number of items remaining after the previous failure or censoring);

c) for each failure, calculate the cumulative sum of instantaneous failure rates, as an estimate of the hazard function;

d) plot the estimated cumulative hazards against the time of failure on either log-log paper or ln-ln paper;

e) fit a straight line to the plots;

f) estimate the parameters.

Annex E gives worked examples. IEC 61810-2 also provides examples of using hazard plotting to estimate the parameters of a Weibull distribution.

8 Interpreting the Weibull probability plot

8.1 The bathtub curve

8.1.1 General

The often-used bathtub curve (see Figure 3) shows the relationship between the Weibull shape parameter, β, and the hazard function throughout the life of an item. Not all items, however, display all elements of the bathtub curve during their lifetimes.

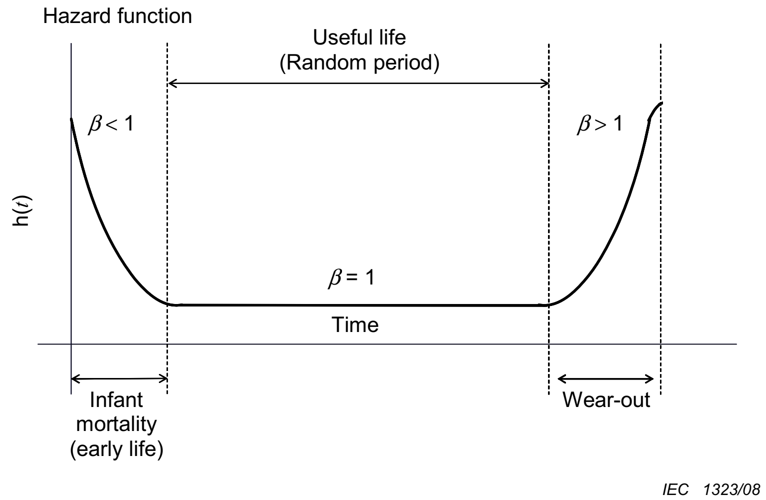


Figure 3 – Typical bathtub curve for an item

8.1.2 β <1 – Implies early failures

Both electronic and mechanical systems may initially have high failure rates. Manufacturers conduct production process control, production acceptance tests, "burn-in," or reliability stress screening (RSS), to prevent early failures before delivery to the customer. Therefore, shape parameters of less than one indicate the following:

– lack of adequate process control;
– inadequate burn-in or stress screening;
– production problems, mis-assembly, poor quality control;
– overhaul problems;
– mixture of populations;

– run-in or wear-in.

Many electronic components during their useful life show a decreasing instantaneous failure rate, thus featuring shape parameters less than 1. Preventive maintenance on such a component is not appropriate, as old parts are better than new.

8.1.3 β = 1 – Implies constant instantaneous failure rate

This is often called the random failure period as the failures occur randomly in time. These failure modes are considered independent of time. In this case, preventive maintenance would not improve the system.

Therefore, any of the following might be suspected:

– random maintenance errors, human errors;
– random overload;
– failures due to nature, foreign object damage, lightning strikes;
– mixtures of data from three or more failure modes (assuming they have different values of β) where no failure mechanism dominates the failure behaviour.

Here again, preventive maintenance is not appropriate. The Weibull distribution with β = 1 is identical to the exponential distribution. Of those that survive to time, t, a constant percentage fails in the next period of time. This is known as a constant instantaneous failure rate.

8.1.4 β > 1 – Implies wear-out

Some typical examples of these cases are as follows:

– wear;
– corrosion;
– crack propagation;
– fatigue;
– moisture absorption;
– diffusion;
– evaporation (weight loss);
– damage accumulation.

Design measures have to ensure that those phenomena do not significantly contribute to the probability of product failure during the expected operational life.

Three-parameter Weibull distribution estimates minimum time to first failure, which is highly advantageous in cases where the shape parameter is greater than 1 (see 5.2 or 8.5).

8.2 Unknown Weibull modes may be "masked"

The “masked" phenomenon might be encountered when there are two or more competing failure modes with high values of shape parameters and highly different scale parameters. This means that for a small sample size, most or all of the samples would fail in the failure mode with lower scale parameter. The other failure modes may not be identified until the first failure mode is eliminated. An example of two competing failure modes is shown in Figure 4.

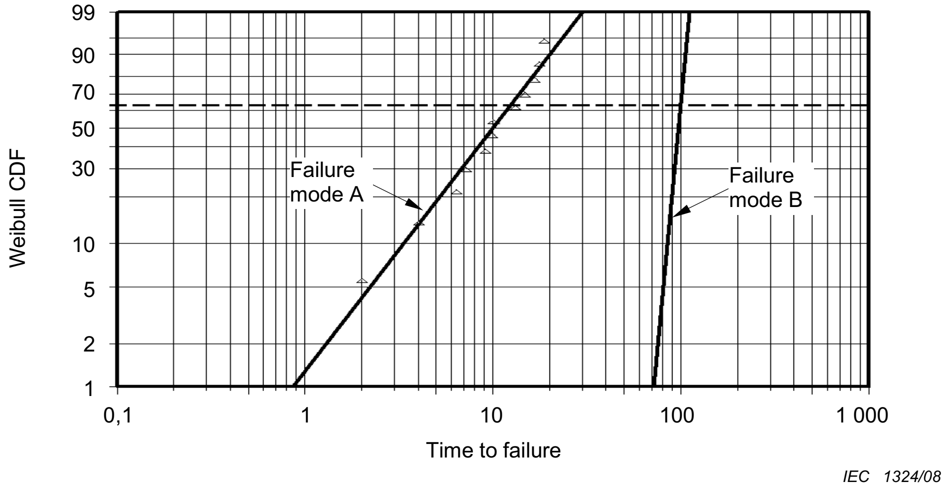


Figure 4 – Weibull failure modes may be “masked”

8.3 Small samples

Weibull analysis is possible from small samples. However, confidence limits are affected by sample size. Small samples will increase the uncertainty in estimating the life parameters.

Improvement in uncertainty with increasing sample size is illustrated in Figures 5 and 6. (The “90 % B life bounds” (confidence limits) contain the unknown “B life” with a frequency of 90 %. The interval is much smaller in Figure 6.)

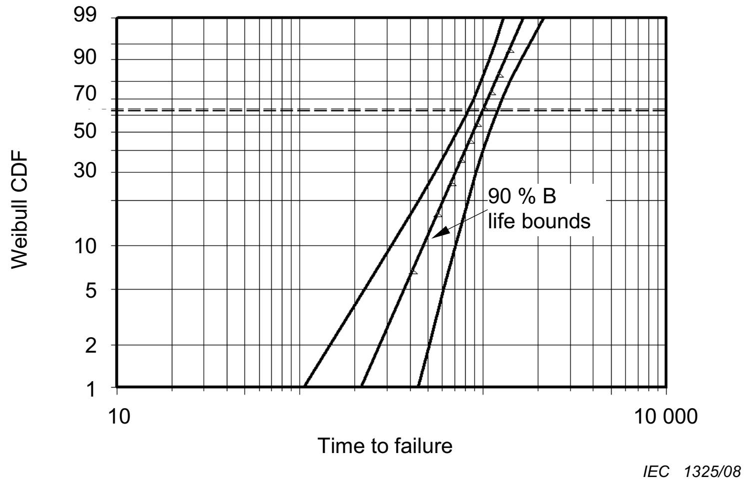


Figure 5 – Sample size: 10

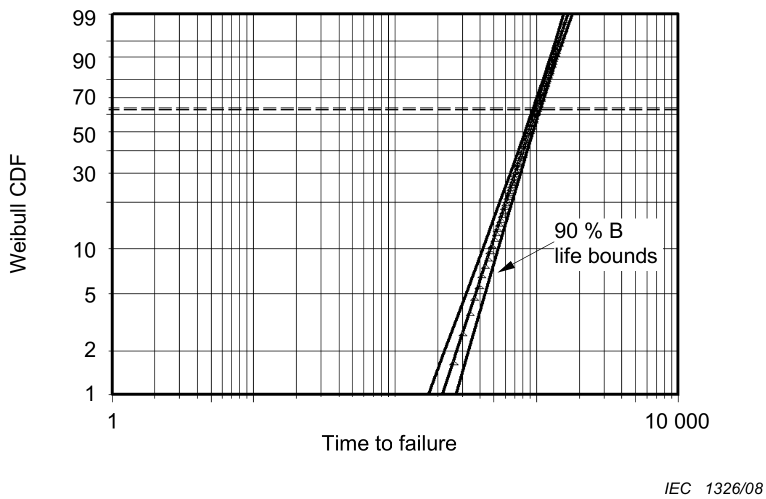


Figure 6 – Sample size: 100

The degree of uncertainty is largest in the tail of the Weibull distribution, as indicated by small values of F*(t)* when the fraction failing is small. Samples of greater than 20 failures and suspensions are required to differentiate the Weibull from other distributions.

Decisions based upon results from a small sample should consider the uncertainty and, where possible, should be refined by collection and analysis of additional data.

8.4 Outliers

Sometimes, the first or last point in a data set is a wild point and not a member of the data set for some reason; such points are termed outliers. These points may be important to the life data analysis, and therefore require investigation of the engineering aspects of data recording, test records, instrumentation calibrations, etc. in order to identify the cause of extreme scatter of the point. Sometimes, the outliers may indicate a weak population or process flaws, and are therefore highly significant from the reliability assurance point of view.

8.5 Interpretation of non-linear plots

If the data on a Weibull plot appears curved, as illustrated in Figure 7, this indicates that the t_0 parameter may be non-zero. Before modifying the plot, it is necessary to check if the plot contains more than one failure mode. If so, refer to Annex G and investigate further whether those modes are competing with each other or are simple mixtures.

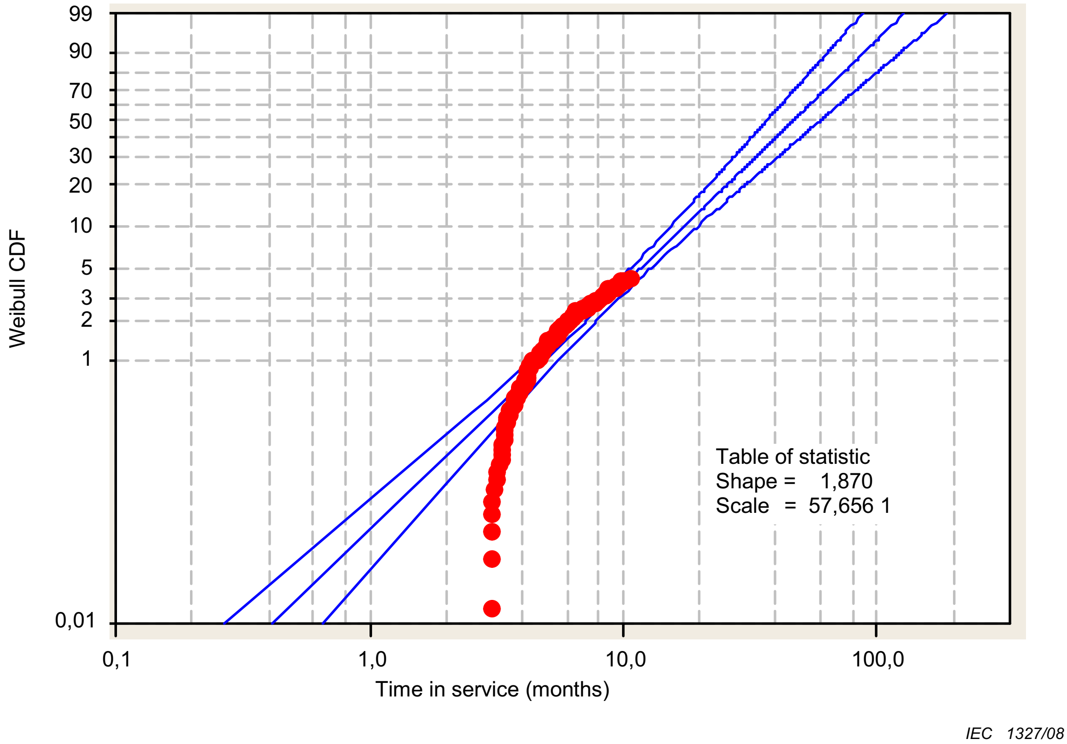
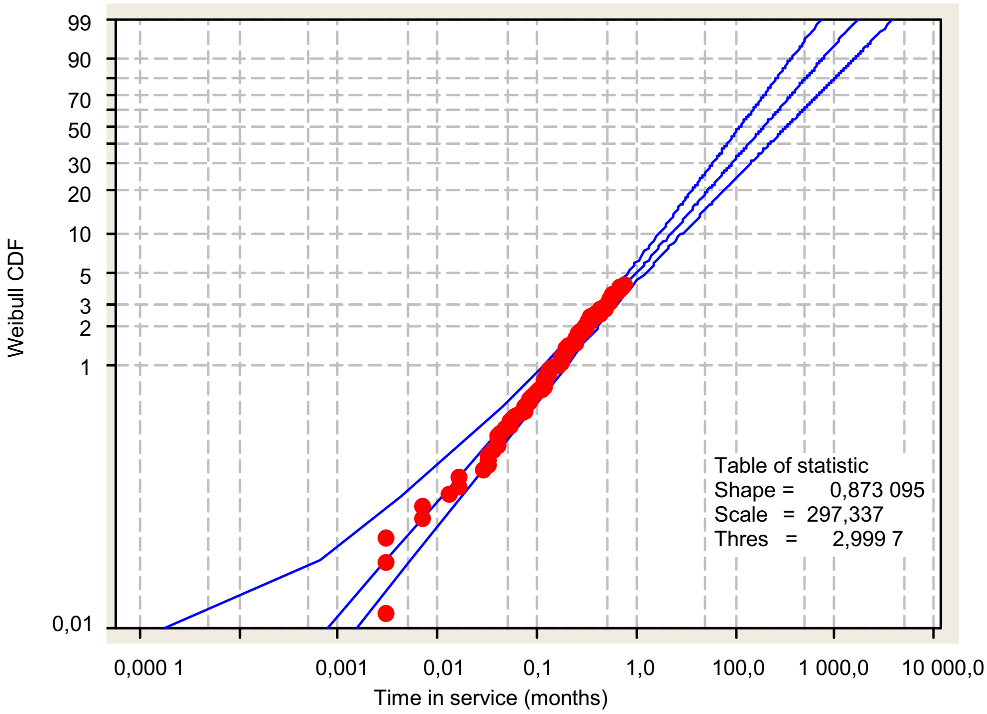


Figure 7 – An example showing lack of fit with a two-parameter Weibull distribution

Minimum life does not mean at "zero time", but rather that there exists a minimum life or a minimum endurance. "Zero age" is where none of the wear-out failure mechanisms of an item has started to operate whereas "zero time" is where an item has seen no operating time. For example, it may be physically impossible for the failure mode to produce failures instantaneously, or early in life. Figure 8 shows the same data as used in Figure 7 but with the origin shifted 2,99 months. This plot shows a linear fit to the data and is interpreted as a failure-free period (3 months), within which the probability of failure is zero.



IEC 1328/08

Figure 8 – The same data plotted with a three-parameter Weibull distribution shows a good fit with 3 months offset (location – 2,99 months)

The method consists of subtracting t_0 = 3 months from each data point in Figure 7 to obtain Figure 8. Note that the Weibull ordinate scale and the characteristic life are now in the t_0 domain. To convert back to real time, add t_0 back. This is an example of a three-parameter Weibull distribution with the third parameter, t_0, the failure-free period. A failure-free period should not be assumed without a technical justification. Annex H gives another example of the three-parameter Weibull distribution.

The three-parameter Weibull distribution will show a better fit than the two-parameter Weibull distribution fit simply because it is a more complex model. The following three criteria should always be met before using the three-parameter Weibull:

a) the Weibull plot shall show concave curvature;

b) there shall be a physical explanation of why failures cannot occur before t_0;

c) a larger sample size, at least 21 failures, shall be available. If there is prior knowledge from earlier Weibull distributions that the third parameter is appropriate, a smaller sample size, say eight to ten, may be acceptable.

Concave downward plots occur much more often than concave upward. Concave upward suggests a negative t_0, which may occur when items with wear-out failures were stressed before putting on test. There are several ways to estimate t_0. A curve may be plotted through the data and extrapolated down to the horizontal time scale. The intersection will be an approximate t_0. If the earliest portion of the data is missing, t_0 may compensate for the missing data, although this may not always be successful. For example, Figure 9 shows cable data grouped by vintage year and the aging scale in months.

NOTE t_0 will always be less than the first failure time.

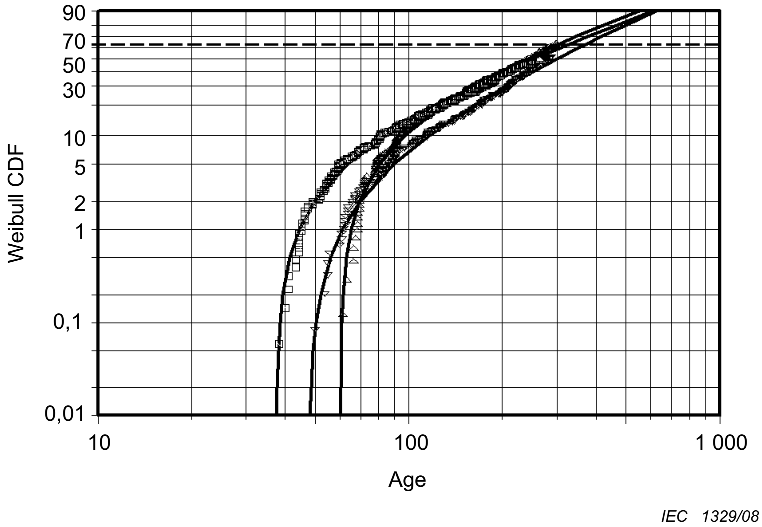


Figure 9 – Example of estimating t_0 by eye

In summary, concave downward plots indicate the origin needs to be shifted to the right, subtracting t_0 from each time to failure to get a straight line fit. Concave upward plots indicate the origin has to be shifted to the left and t_0 has to be added to each time to failure to get a straight line fit. The plot in "as recorded" time scale may be easier to understand.

8.5.1 Distributions other than the Weibull

There are other reasons for poor fit of a straight line, i.e. the data form a curve on Weibull paper. Another distribution may better describe the data. If this is true, the distribution that best describes the data should be used. For example, the log-normal distribution is not a member of the Weibull family of distributions but has application to life data analysis. Log-normal data plotted on Weibull paper are concave downward. The same data plotted on log-normal probability plot follow a straight line.

Data fitted to the three-parameter Weibull plot and the log-normal plot appear curved downward on a two-parameter Weibull plot. Both these distributions can model data with time to first failure.

8.5.2 Data inconsistencies and multimode failures

Based on the plotted Weibull data, an engineering hypothesis may be deduced. This hypothesis should then be confirmed by failure analysis of further investigation. Examples include:

a) failures are mostly low-time parts with high-time parts unaffected, suggesting a batch problem;
b) serial numbers of failed parts are close together, also suggesting a batch problem;
c) the data have a "dogleg" bend or cusps when plotted on Weibull paper, probably caused by a mixture of failure modes; and
d) the first or last point appears suspect as an outlier, indicating data problems or perhaps evidence of a different failure mode.

9 Computational methods and goodness-of-fit

9.1 Introduction

The maximum likelihood estimation (MLE) method is a computational method for large sample cases.

Among many computational methods to estimate the parameters of the Weibull distribution (see [9][1]), MLE has the advantage that it allows estimation of the parameters from the data sets with complicated censoring mechanisms and suspensions, when the number of items under a test is large. This clause describes MLE for the data sets without censoring. First the goodness-of-fit test is introduced to check the Weibull assumption. If the hypothesis is not rejected, then proceed to the MLE.

The methods in Clauses 7 and 8 deal with multiple and singly censored data; however, the methods in this clause deal with singly censored data only (not multiply censored data).

9.2 Assumptions and conditions

A sample of n non-repairable items, coming from the same population, is put on test at a given instant of time $t = 0$. The testing environment shall be the same for all items being subjected to the test, and failed items are not replaced once they fail. When the test is stopped at time T, there are r items that have failed (T can be equal to or greater than t_r). The time to failure of each failed item has to be known. There are r times to failure: t_1, t_2, ..., t_r so that $0 < t_i \leq T, i = 1, 2, ..., r$.

NOTE 1 The statistical procedures of this standard assume access to some computing facility. Although most, if not all, formulas can be implemented in a small programmable calculator, it will be useful, from the user's standpoint, to have access to a programmable computer with a printer and some mass storage medium.

NOTE 2 Test time for each item has to be made from time zero.

9.3 Limitations and accuracy

These procedures are valid only if there are at least 10 relevant failures. The confidence intervals are approximate. Multiple censoring is not considered in this clause.

MLE is valid for larger sample sizes. The confidence intervals are approximately valid for large sample data sets. Though MLE can be applied to a wide variety of censoring mechanisms and suspensions, only the cases with single censoring are considered here.

9.4 Input and output data

The data to be analysed consist of times to failure of non-repairable items, which are put on test. These times to failure have to be known exactly, as opposed to knowledge of intervals of time. It is not necessary to have the times to failure of all the items tested, since the test can be stopped before all items have failed. All items shall be in operational condition at the start of the test, and the test shall be stopped for all operational items at the same time.

Input:

– number of items on test n;

– times to failure of each failed item, listed in ascending order: t_1, t_2, ..., t_r;

– significance level, γ, or confidence level $(1 – \gamma)$; to be specified.

Output:

– accept/reject goodness-of-fit;

– point estimates and confidence intervals of scale and shape parameters, η and β;

– point estimate of the mean time to failure;

– lower confidence limit for the expected time at which 10 % of the population will fail, B10;

– lower confidence limit for the reliability function R(t).

[1] Figures in square brackets refer to the Bibliography.

9.5 Goodness-of-fit test

Step 1 – Sort the r times to failure in ascending order and compute the natural logarithms of these times $\ln(t_1) = x_1$, $\ln(t_2) = x_2$, ..., $\ln(t_r) = x_r$.

NOTE 1 $x_1 \le x_2 \le, \ldots, \le x_r$.

Step 2 – Compute the following ℓ_i quantities in Equation (15), for i = 1 to (r – 1):

$$\ell_i = \frac{x_i + 1 - x_i}{\ln\left[\ln\left(\dfrac{4(n-i-1)+3}{4n+1}\right) \Big/ \ln\left(\dfrac{4(n-i)+3}{4n+1}\right)\right]} \tag{15}$$

Step 3 – Compute the quantity H using Equation (16) and the quantities obtained in step 2:

$$H = \frac{\displaystyle\sum_{i=\lfloor r/2 \rfloor+1}^{r-1} \frac{\ell_i}{\lfloor (r-1)/2 \rfloor}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{\ell_i}{\lfloor r/2 \rfloor}} \tag{16}$$

where the symbol $\lfloor x \rfloor$ is used to denote the largest integer less than or equal to x.

Step 4 – Reject the hypothesis that the data come from a Weibull distribution at the γ100 % significance level if $H \ge F_\gamma\left(2\lfloor (r-1)/2 \rfloor, 2\lfloor r/2 \rfloor\right)$ and do not proceed with the analysis.

Otherwise, no evidence has been detected to reject the Weibull nature of the times to failure and the analysis can proceed.

The values of the fractiles of the F distribution function can be found, for example, in Table IV of ISO 2854.

NOTE 2 It is recommended that, in case of rejection, the plotted data be examined for a possible mixture of populations, anomalous failure times or other artefacts. These situations are analysed by techniques beyond the scope of this standard.

9.6 MLE – point estimates of the distribution parameters β and η

The MLE of the two parameters of the Weibull distribution is obtained by numerically solving the equations below. The value of β that satisfies the first equation is the MLE of β. This value is used in the second equation to derive the MLE of η.

NOTE Any computer routine to solve equations can be used to obtain β from Equation (17), as the convergence to a single value is usually very fast.

Step 1 – Find the estimate of $\hat{\beta}$ that satisfies Equation (17):

$$\left[\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} t_i^{\beta} \ln(t_i) + (n-r)T^{\beta}\ln(T)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} t_i^{\beta} + (n-r)T^{\beta}} - \frac{1}{\beta}\right] - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln(t_i) = 0 \tag{17}$$

Step 2 – Compute $\hat{\eta}$ using Equation (18) and the value of $\hat{\beta}$, obtained in step 1, from:

$$\hat{\eta}=\left\{\frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\beta}}+(n-r)T^{\hat{\beta}}\right]\right\}^{\frac{1}{\hat{\beta}}} \tag{18}$$

9.7 Point estimate of the mean time to failure

The point estimate of the mean time to failure, $\hat{m}$, is calculated using Equation (19) as:

$$\hat{m}=\hat{\eta}\,\Gamma(1+\frac{1}{\hat{\beta}}) \tag{19}$$

where $\hat{\beta}$ and $\hat{\eta}$ are obtained from steps 1 and 2 of 9.6 and where $\Gamma(z)$ is the gamma function of z as defined in NOTE 2 to definition 2.56 of ISO 3534-1.

Table D.1 gives the value of $\Gamma(1+1/\beta)$ as a function of β. For β values not listed in this table, a linear interpolation is acceptable.

NOTE 1 For cases where the lower confidence limit of β is greater than or equal to 1 (wear-out case), the confidence interval for η can be used as a rough measure of the confidence interval for the mean time to failure, since in these cases the gamma function always lies between 0,88 and 1.

NOTE 2 Mean time to failure (MTTF) is the mean value of a number of times to failure. The reliability tools used for exponentially distributed data (constant instantaneous failure rate) can only be used for Weibull distributed data if β = 1. It should be noted that the time to failure distribution is normally not symmetrical.

9.8 Point estimate of the fractile (10 %) of the time to failure

Compute $\hat{B}_{10}$ using Equation (20), the point estimate of B_{10}, the time by which 10 % of the population will have failed:

$$\hat{B}_{10}=\hat{\eta}\left[\mathrm{In}\left(\frac{1}{0,9}\right)\right]^{1/\hat{\beta}} \tag{20}$$

9.9 Point estimate of the reliability at time *t* ($t \le T$)

The point estimate of the reliability at time t is given by Equation (21):

$$\hat{R}(t)=\mathrm{e}^{-(t/\hat{\eta})^{\hat{\beta}}} \tag{21}$$

9.10 Software programs

There are many statistical and reliability software packages that give estimates of the parameters of Weibull distributions using both graphical methods and/or MLE, not only for single and multiple censored data, but also for more general incomplete data due to complicated censoring mechanisms and suspensions.

10 Confidence intervals

10.1 Interval estimation of β

Step 1 – Compute the constants C, β_1 and β_2 using the ratio $q = r/n$ and Equations (22), (23) and (24):

$$C = 2{,}14628 - 1{,}361119\, q \tag{22}$$

$$\beta_1 = \chi^2_{\gamma/2}\left[(r-1)\,C\right] \tag{23}$$

$$\beta_2 = \chi^2_{1-\gamma/2}\left[(r-1)\,C\right] \tag{24}$$

where $\chi^2_p(\nu)$ is the p fractile of the χ^2 distribution with ν degrees of freedom.

Since the number of degrees of freedom, $(r - 1)C$, will not be an integer, the χ^2 fractiles should be calculated either using a computer program, or through interpolation in Table III of ISO 2854 or Table D.1 of IEC 60605-4:2001.

Step 2 – Compute the multiplying factors w_1 and w_2 using Equation (25) and (26):

$$w_1 = \left[\frac{\beta_1}{r\,C}\right]^{\frac{1}{1+q^2}} \tag{25}$$

$$w_2 = \left[\frac{\beta_2}{r\,C}\right]^{\frac{1}{1+q^2}} \tag{26}$$

Step 3 – Compute the $(1 - \gamma)100$ % confidence interval for β using Equation (27):

$$(w_1\hat{\beta}, w_2\hat{\beta}) \tag{27}$$

NOTE The confidence intervals for β can be used for comparisons. Since a value of $\beta > 1$ constitutes evidence of wear and a value of $\beta < 1$ indicates infant mortality, the confidence interval for β can be used to test these assumptions. Conversely, if the confidence interval for β contains the value $\beta = 1$, the items being tested may belong to a constant failure rate population. A formal test on constant failure rate is provided in [10].

10.2 Interval estimation of η

Step 1 – Compute the constants A_4, A_5 and A_6, using the ratio $q = r/n$, and Equations (28), (29) and (30):

$$A_4 = 0{,}49q - 0{,}134 + 0{,}622\, q^{-1} \tag{28}$$

$$A_5 = 0{,}2445\,(1{,}78 - q)\,(2{,}25 + q) \tag{29}$$

$$A_6 = 0{,}029 - 1{,}083\,\ln(1{,}325\, q) \tag{30}$$

Step 2 – Carry out step 2a if the test was stopped before all the items have failed, that is if $r < n$, or carry out step 2b if all the failure times are known, that is if $r = n$.

Step 2a ($r < n$) – Compute the constants A_3, d_1, d_2, A_1 and A_2: using Equations (31), (32), (33) and (34):

$$A_3 = -A_6\, x^2 \tag{31}$$

where $x = u_{(1-\gamma/2)}$ and u_p is the p fractile of the normal distribution given in Table D.2.

$$d_1 = \frac{A_3 + x\sqrt{x^2\left(A_6^2 - A_4A_5\right) + rA_4}}{r - A_5x^2} \tag{32}$$

$$d_2 = \frac{A_3 - x\sqrt{x^2\left(A_6^2 - A_4A_5\right) + rA_4}}{r - A_5x^2} \tag{33}$$

$$A_1 = \mathrm{e}^{\left(-d_1/\hat{\beta}\right)} \;;\; A_2 = \mathrm{e}^{\left(-d_2/\hat{\beta}\right)} \tag{34}$$

Step 2b ($r = n$) – Compute the quantities d_3, A_1 and A_2: using Equations (35), (36) and (37):

$$d_3 = t_{(1-\gamma/2)}(n - 1) \tag{35}$$

where $t_p(r - 1)$ is the p fractile of the Student t distribution with $(r - 1)$ degrees of freedom and can be found in Table IIa of ISO 2854 (single-sided case).

$$A_1 = \mathrm{e}^{\left(\frac{-1,053 d_3}{\hat{\beta}\sqrt{n-1}}\right)} \tag{36}$$

$$A_2 = \mathrm{e}^{\left(\frac{1,053 d_3}{\hat{\beta}\sqrt{n-1}}\right)} \tag{37}$$

where $\hat{\beta}$ is obtained from step 1 of 9.6.

Step 3 – Compute the $(1 - \gamma)100$ % confidence interval for η using Equation (38):

$$(A_1\hat{\eta}, A_2\hat{\eta}) \tag{38}$$

where $\hat{\eta}$ is obtained from step 2 of 9.6.

10.3 MRR Beta-binomial bounds

The derivation of these bounds is directly related to the determination of median ranks. The bounds are calculated from the Beta-binomial distribution, a modified binomial distribution that is used to evaluate the Beta distribution as described by Johnson [14]. Suspensions require interpolation in the 5 % and 95 % ranks. These Beta-binomial intervals are slightly conservative (the width of the interval is too large), when compared to the Fisher's Matrix and likelihood ratio methods.

The method for converting the 5 % and 95 % ranks into intervals provides intervals for the time to failure. The following Equations (39) and (40) relate the 5 % and 95 % ranks in Annex C to the Weibull line:

$$t_{i,0,95} = \eta\left[\ln\left(\frac{1}{(1 - F_{i(0,95)})}\right)\right]^{\left(\frac{1}{\beta}\right)} \tag{39}$$

$$t_{i,0,05} = \eta\left[\ln\left(\frac{1}{(1 - F_{i(0,05)})}\right)\right]^{\left(\frac{1}{\beta}\right)} \tag{40}$$

10.4 Fisher's matrix bounds

There are significant advantages of using Fisher's matrix bounds over the Beta-binomial approach. Furthermore, for moderate size samples, the apparent confidence level is closer to the requested level, though more optimistic, than Beta-binomial. For 10 or fewer failures these bounds are too optimistic (see reference [20]).

10.5 Lower confidence limit for B_{10}

Compute the lower (1 – γ) 100 % confidence limit of B_{10} using Equations (41), (42), (43) and (44):

$$h_1 = \ln[-\ln(0,9)] \tag{41}$$

$$\delta_1 = \frac{-A_6 x^2 - r h_1 + x\sqrt{\left(A_6^2 - A_4 A_5\right)x^2 + r A_4 + 2 r h_1 A_6 + r A_5 h_1^2}}{r - x^2 A_5} \tag{42}$$

where $x = u_\gamma$ is the γ fractile of the normal distribution given in Table D.2, and A_4, A_5 and A_6 are computed according to step 1 of 10.2.

$$Q_1 = \mathrm{e}^{\left(-\frac{\delta_1 + h_1}{\hat{\beta}}\right)} \tag{43}$$

$$B_{10}\Big|_{\text{lower limit}} = Q_1 \hat{B}_{10} \tag{44}$$

10.6 Lower confidence limit for R

Compute the lower (1 – γ) 100 % confidence limit for the reliability at time t, $R_{1-\gamma}\big|_{\text{lower limit}}$ using Equations (45) (46) and (47):

$$C_t = \hat{\beta} \ln\left(\frac{\hat{\eta}}{t}\right) \tag{45}$$

$$A_0 = A_4 + C_t^2 A_5 - 2 C_t A_6 \tag{46}$$

where A_4, A_5 and A_6 are computed according to step 1 of 10.2.

$$R_{1-\gamma}\Big|_{\text{lower limit}} = \exp\left(-\exp\left[-C_t + x\sqrt{\tfrac{A_0}{r}}\right]\right) \tag{47}$$

where $x = u_\gamma$ is the γ fractile of the normal distribution given in Table D.2.

11 Comparison of median rank regression (MRR) and maximum likelihood estimation (MLE) estimation methods

11.1 Graphical display

Rank regression, MRR, provides a graphical display of the data. This helps to identify instances of poor fitting Weibull distribution plots perhaps suggesting another distribution, more than one failure mode affecting the items, mixtures of failure modes, batch problems or outliers. MLE does not provide a graphical display of the data.

11.2 B life estimates sometimes known as B or L percentiles

Rank regression provides more accurate estimates of "low" percentiles, like the B percentile life, from small sample sizes. These low B percentile lives and corresponding high reliabilities may be extremely important for safety problems, warranties, guaranties and contract obligations. Maximum likelihood B percentile lives tend to be optimistically biased for small numbers of failures.

11.3 Small samples

Rank regression failure forecasts are usually more accurate for small samples but much depends on the shape and age distribution of the suspensions. However, if the data set is introduced into a computer, it is recommended that both MRR and MLE should be used for small samples. In most cases the two sets of results will be in reasonably good agreement, providing some assurance of a good Weibull fit.

General advice for identifying the most appropriate method with respect to the sample size is as follows:

– For 20 or fewer data points, with or without censoring times, X on Y MRR is preferred.

– With data sets containing fewer than 10 data points, WeiBayes analysis is preferred when prior knowledge of the slope parameter, β, is available.

– For other data sets, MRR and MLE results should be compared. Closely similar results for MRR and MLE estimates, together with good regression and likelihood measures, will provide assurance that the data are correctly modelled by a Weibull distribution. (Comparison with other models should also be considered.) However, a large discrepancy between MRR and MLE estimates will indicate that the data are not correctly modelled and may contain multiple populations. Any such discrepancies should be investigated further.

11.4 Shape parameter β

MLE tends to overestimate the shape parameter, β, with small samples. The slope of the Weibull plot is often too steep. The slope of the log-normal and normal plots is similarly biased, too steep, as MLE standard deviation is underestimated.

11.5 Confidence intervals

Likelihood ratio interval estimates for MLE are rigorous; they are adjusted for small sample sizes. It is recommended to use pivotal interval estimates for MRR.

11.6 Single failure

MLE may provide a solution with one failure and some right or late suspensions. The capability has large uncertainties, but there are situations where it cannot be avoided as it provides the only solution if β is unknown. WeiBayes is preferred if there is prior knowledge of β.

11.7 Mathematical rigour

There is a mathematical objection to the use of the regression least-squares method for rank regression. The residual scatter about the line is not uniform. The results are such that the lower end of the line tends to be overweighed compared to the upper end. However, as all engineering interest is in the lower end of the curve, this is acceptable to engineers while it is unacceptable to statisticians. MLE does have attractive mathematical qualities.

11.8 Presentation of results

For presentations of results it is often best to keep it simple and concise in order to improve communications. Rank regression plots are preferred for this purpose. MLE plots with data points located with median ranks are not recommended as they can inspire comments about the poor fit of the Weibull line.

12 WeiBayes approach

12.1 Description

In WeiBayes analysis, the shape parameter, β, is assumed from historical failure data, prior experience, or from engineering knowledge of the physics of the failure. WeiBayes is defined as Weibull analysis with a given β parameter. It is a single parameter (η) Weibull distribution. WeiBayes can be used to analyse data sets with and without failures, where both types of data may have suspensions.

12.2 Method

Given β, Equation (48) may be derived using the method of maximum likelihood to determine the characteristic life, η:

$$\eta = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{t_i^{\beta}}{r} \right]^{1/\beta} \tag{48}$$

where

t is the time or cycles;

r is the number of failed items;

N is the total number of failures plus suspensions;

η is the maximum likelihood estimate of the characteristic life.

With β assumed and η calculated from Equation (48), a Weibull distribution is defined. A WeiBayes line is plotted on Weibull probability paper. The WeiBayes plot is used exactly like any other Weibull plot. Estimates of B lives, failure forecasts, and reliability are available from WeiBayes analysis.

12.3 WeiBayes without failures

In many WeiBayes problems, no failure has occurred. For example, a redesigned component may have been tested without any observed failures. In this case, a second assumption is required. The first failure is assumed to be imminent, i.e. in the equation, set r = 1,0. As no failures have occurred, this is a conservative engineering assumption. The resulting WeiBayes line is similarly conservative. Statistically, the WeiBayes line, based on assuming one failure, is a lower one-sided confidence estimate. That is, it may be stated with 63,2 % confidence that the true Weibull distribution lies to the right of the WeiBayes line, if the assumption of β is correct.

WeiBayes lines may be obtained at any level of confidence by employing larger or smaller denominators (assume imminent failures):

Confidence	50 %	63,2 %	90 %	95 %	99 %
Denominator	0,693	1,0	2,3	3,0	4,6

12.4 WeiBayes with failures

When the denominator is based on actual failures, the scale parameter, η, is an MLE estimate. A valuable characteristic of MLE estimates is that they are invariant under transformation. This means that the resulting WeiBayes line, B lives, and reliability estimates are all MLE estimates. The WeiBayes line is an MLE estimate of the true unknown Weibull distribution, a nominal Weibull.

Weibull distributions based on samples of 2 or 3 failures have large uncertainties. If there is good knowledge of β from prior data, significant improvements in accuracy may be obtained with WeiBayes. WeiBayes may offer cost reductions through reduced testing without loss of accuracy. A Weibull distribution library or data bank to provide Weibull distribution slope histories is strongly recommended in order to obtain the advantage of WeiBayes analysis.

The distinction between zero failure and one failure WeiBayes is worth reviewing. For example, assume five redesigned units have been tested without failure. A WeiBayes line is calculated based on the β value estimated from the original design. This is a lower one-sided confidence interval for the true unknown Weibull for the redesign. Now assume the same data set includes one failure and four suspensions.

The resulting WeiBayes is identical to the first zero failure WeiBayes, but the interpretation is different. With one failure, the WeiBayes is a nominal, MLE estimate of the true unknown Weibull distribution, not a confidence interval. However, a lower confidence bound for the MLE WeiBayes line may be calculated using Chi-squared [20].

If r is the number failures (≥1), the lower C % confidence limit for η is given by Equation (49):

$$\eta_{\mathrm{c}} = \eta_{MLE} \left(2\,\mathrm{r} / \chi_C{}^{2}\left(2\mathrm{r}+2\right)\right)^{(1/\beta)} \tag{49}$$

Using η_{C} and β, the lower confidence bound for the true WeiBayes line is defined.

12.5 WeiBayes case study

Fifteen compressor failures have been experienced in a large fleet of aircraft engines. Weibull analysis provides a β of approximately 5,0. Three redesigned compressor cases have been tested in engines to 1 600 h, 2 900 h and 3 100 h without failure. Is this enough testing to substantiate that the redesign is significantly better than the old design? Assuming β = 5,0 and the times on the three redesigned units, the characteristic life may be estimated for a WeiBayes solution.

$$n = \left[\frac{(1\,600)^5 + (2\,900)^5 + (3\,100)^5}{1}\right]^{1/5} = 3\,468\ \mathrm{h} \tag{50}$$

The WeiBayes line is plotted in Figure 10. It may be stated with 63 % confidence that the Weibull distribution for the redesigned units is to the right of this line and, therefore, significantly better than the parts in the bill-of-materials. It is possible that the redesign has eliminated this failure mode but that cannot be proven with this sample of data. As more time is put on these units without failure, the WeiBayes line will move further to the right and more assurance will be gained that the failure mode has been eliminated. The assumption of slope, in this case, is based on an established Weibull failure model.

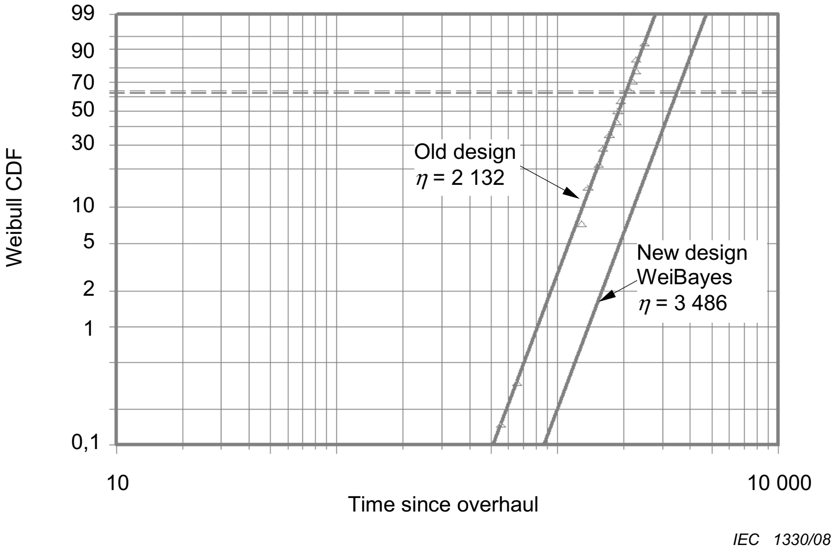


Figure 10 – New compressor design WeiBayes versus old design

When testing highly reliable items, a very small number of failures is often observed, i.e. zero failures or just one failure. This does not permit estimation of the parameters of a two- or three-parameter Weibull distribution.

In cases where the β value for the relevant failure mode is known from previous tests, a rough estimate can still be made with zero or one failure. Furthermore, the estimation of the best straight line through a small number of points can be improved if the β value is known. The available information can then be used to estimate the η value.

13 Sudden death method

Sudden death testing requires small subgroups of items for test, say three to eight items, the test consisting of running all the items simultaneously until the first failure. For a subgroup of four, this provides data on one failure and three suspensions at the same time. Perhaps four to ten items in each subgroup may be tested in typical sudden death plans. Ten sets of four provide ten failures and 30 suspensions. Sudden death provides a trade-off compared to testing all items to failure, i.e. an increase in uncertainty for a gross reduction in test time. In the bearing industry, for example, sudden death with subgroups of four is employed worldwide, and the analysis provides an estimate of L16 life. In other industries, estimates of L1 life are more common from sudden death testing.

The sudden death method is used to determine the time to a specified percentage of failures. This point of the Weibull curve will be determined with a higher precision while the rest of the Weibull curve, especially the slope of the plot, is determined with less precision than with a conventional Weibull test. The advantage of the sudden death method is that the test time is shorter than testing all samples to failure.

Often the required information is time to wear-out, i.e. time to a low, but significant percentage of failures, for example 10 %. This number is widely used for stating life of bearings, the so called L10 value, sometimes also called the B10 value. The estimated time to failure for other percentages, obtained from the Weibull plot, are shown in Table 4.

In a sudden death method, the L8,3 value (8,3 % failed) can be estimated, for example. This value can be stated as a conservative estimate of the L10 value, or be stated as the best estimate for the L8,3.

The following procedure is used to estimate the LX time (the time to X per cent failures):

a) divide the available number of samples randomly into A subgroups each consisting of B components according to Table 4;
b) set all subgroups to test;
c) record the time to first failure in each subgroup;
d) stop the test of a subgroup as soon as the first failure has occurred in that subgroup;
e) plot the time to first failure from each subgroup on a Weibull diagram, treating the rest of the items in each subgroup as suspended at the time of the first failure in that subgroup;
f) read the time to LX value on the plotted Weibull line as usual.

NOTE 1 In this case the LX point is estimated with higher precision, while the Weibull curve can be used to estimate the time to other percentages of failures, as well as estimating the slope of the Weibull curve. Uncertainty is larger, however, due to the large number of suspensions. This is especially important when time to other percentages of failures are read from the curve.

NOTE 2 Subgroups of four are often used for sudden death testing due to the saving in the number of test rigs required.

Table 4 – Subgroup size to estimate time to X % failures using the sudden death method

Subgroup size B	Precise median rank for 1 failure	LX estimated in test
2	0,292 9	L30
3	0,206 3	L20
4	0,159 1	L16
5	0,129 4	L13
6	0,109 1	L10
7	0,094 3	L9
8	0,083 0	L8
9	0,074 1	L7
10	0,067 0	L6
50	0,013 8	L1
70	0,009 94	L1

The LX value estimated in a sudden death test is almost as reliable as if all components in each subgroup had been tested to failure, but the confidence interval is approximately 50 % larger. A sudden death test can be performed much faster than testing all components to failure, however. For example, for β = 1 the test time is only 25 % of the time to test all components to failure provided the subgroups are tested sequentially. If all subgroups are tested simultaneously, the time required is only approximately 7 % of the time required to test all components to failure.

The ratio of test times may be estimated using the average times to failure. Manufacturers that employ sudden death reduce the test time by constructing sudden death rigs that test each subgroup together, subjected to the same load.

Example: below are data from 12 failures in cycles.

Table 5 – Chain data – Cycles to failure

Subgroup 1	Subgroup 2	Subgroup 3	Subgroup 4
Suspended at 3 698	Suspended at 4 650	Suspended at 2 398	**Failed at 2 945**
Failed at 3 698	Suspended at 4 650	Suspended at 2 398	Suspended at 2 945
Suspended at 3 698	**Failed at 4 650**	**Failed at 2 398**	Suspended at 2 945

For the sudden death test, the mean rank, $(1/(N + 1))$, for the first of three is 1/4. The corresponding L life is B25. For a Weibull with β = 2,13, the B25 life is 0,557 η and the ratio of MTTF to η is 0,8858. Therefore, the ratio of test times for sudden death is (0,557 x 4)/(0,885 8 x 12) or approximately 0,2. Comparing Fisher's matrix confidence bounds for the 10 sets of three with the Weibull for all 12 failures provides about a 27 % increase in the statistical uncertainty of B1 life compared to testing all 12 to failure. This increase in uncertainty is traded for an 80 % reduction in test time.

NOTE 3 Data can also be analysed by treating the subgroups as single samples.

14 Other distributions

If x is log-normally distributed, the distribution of x will be skewed to the right and log x will have the familiar bell-shaped normal distribution.

The log-normal distribution has many applications. The distribution of flaw sizes, radio frequency (RF) parameters and repair times are typical examples. Perhaps the most important is progressive deterioration such as performance loss, crack growth to rupture and increases in vibration amplitude if the rate of change increases with the deterioration. If the rate of change is linear these distributions will tend to be Weibull.

Physically, the log-normal distribution models a process where the time to failure results from the multiplication of effects. For example, deterioration may be progressive; a crack grows rapidly with high stress because the stress increases progressively as the crack grows. In this case, the growth rate will be log-normal. On the other hand, if the growth rate is linear with time, as it may be in a low stress area, the Weibull distribution will be more appropriate. The log-normal has many applications such as materials properties, personal incomes, inheritances, bank deposits, growth rate of cracks and the distribution of flaw sizes.

While there are many statistical distributions other than the Weibull, the log-normal distribution is the second choice for life data analysis. The log-normal distribution should be the first choice if there is good prior information and more than twenty failures. For example, many material characteristics employ the log-normal distribution. Times to repair and crack growth to rupture are often log-normal. Knowledge that the physics of failure indicates progressive deterioration is also a clue that the data may be log-normal. Some semiconductor chip failures are log-normal. The distribution of the Weibull parameter, β, is approximately log-normal, while η is more normally distributed.

Annex A
(informative)

Examples and case studies

A.1 Low time failures

Figure A.1 is an example of low-time part failures on main oil pumps. Gas turbine engines are tested before being shipped to the customer, and since there were over 1 000 of these engines in the field with no problems, what was going wrong? Upon examining the failed oil pumps, it was found that they contained oversized parts. Something had changed in the manufacturing process that created a batch problem. The oversized parts caused an interference with the gears in the pump that resulted in failure. This was traced to a machining operation and corrected. Low-time failures may suggest wear-out by having a slope greater than one, but more often, they will show infant mortality, with slopes less than one. Low-time failures provide a clue to a production or assembly process change, especially when there are many successful high-time items in the field. Overhaul and scheduled maintenance also may produce these "batch" effects. Times since overhaul or maintenance may provide a clue. The presence of many late suspensions may also be a clue that a batch problem exists.

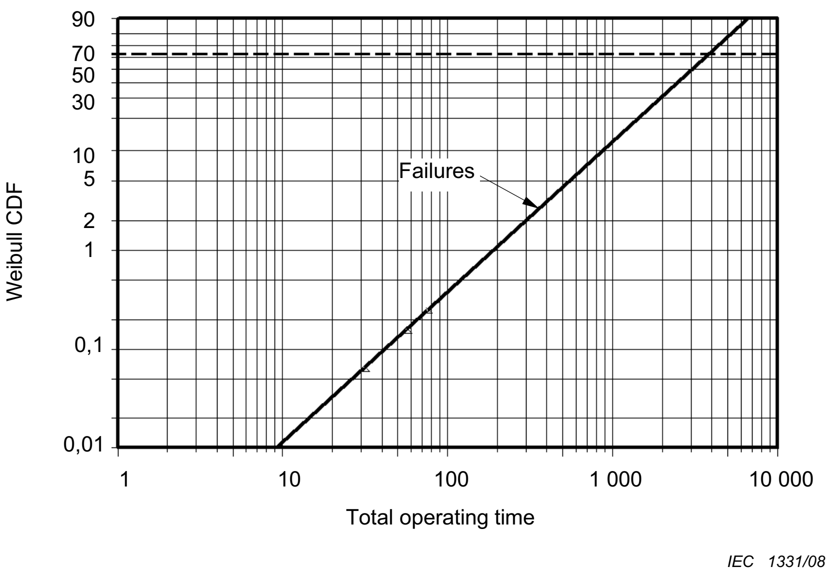


Figure A.1 – Main oil pump low times

A.2 Close serial numbers

The same reasoning can be extended to other particular failure groupings. For example, if low-time items have no failures, mid-time items have failures, and high-time items have no failures, then a batch problem is suspected. Something may have changed in the manufacturing process for a short period and then changed back. Closeness of serial numbers of the failed parts suggests a batch problem. Figure A.2 is a prime example of a process change that happened midstream in production. Bearings were failing in new augmenter pumps. The failures occurred in the 200 h to 400 h period. At least 650 items had more time than the highest time of failure. These failures were traced to a process change that was incorporated as a cost reduction for manufacturing of bearing cages. This example shows a poor fit to one Weibull distribution, as there are at least two dominant failure modes present in the data as shown in Figure A.2.

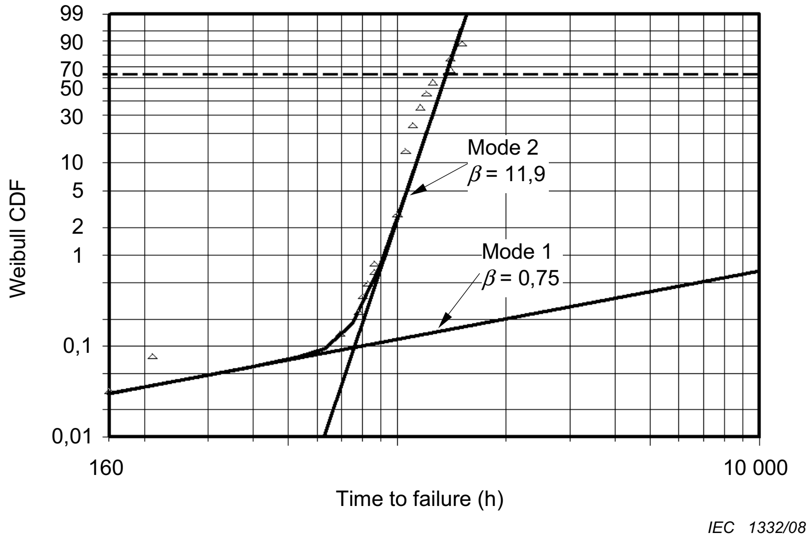


Figure A.2 – Augmenter pump bearing failure

A.3 Steep slopes

Caution should be exercised with values of β in excess of 4. A steep plot may be concealing curvature, outliers or doglegs, and the messages that they give about the data fit. The steep plot often hides incorrect Weibull data. All the messages from the data such as curves, outliers, doglegs tend to disappear. Apparently, good Weibulls may have poor fits. An example is given in Figure A.3. Here, at first glance, the plots appear to be good fits, but there is curvature and perhaps an outlier.

NOTE The steep slope of the Weibull curves is preferable from an engineering point of view, provided the value of η is large enough.

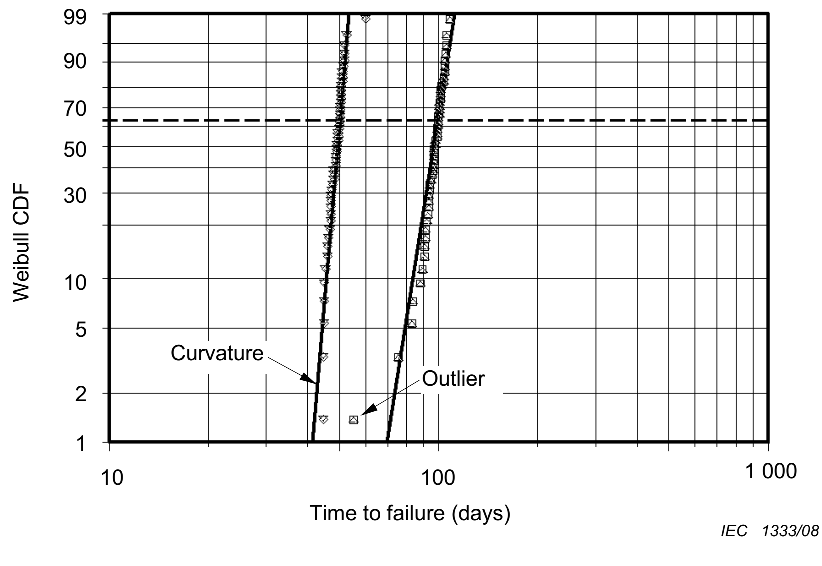


Figure A.3 – Steep β values hide problems

Annex B
(informative)

Example of computations

This example is provided as a numerical test case to verify the accuracy of computer programs implementing the MRR and MLE procedures of this standard.

Forty items are put under test. The test is stopped at the time of the 20th failure. The following are the times corresponding to the first 20 failures:

Table B.1 – Times to failure

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	t_{16}	t_{17}	t_{18}	t_{19}	t_{20}
5	10	17	32	32	33	34	36	54	55	55	58	58	61	64	65	65	66	67	68

The first step is to plot the data as shown below in Figure B.1. Note that although both the MRR and MLE goodness-of-fit imply an acceptable fit, the plot shows the classic Bi-Weibull mixture of two failure modes, low slope followed by steep slope. Distribution analysis using the likelihood ratio test favours the three-parameter Weibull. The mixture analysis based on likelihood confirms at least two failure modes are present. This illustrates the merit of always plotting the data, not relying entirely on analytical methods.

Applying the numerical procedures of this standard yields the following results:

A goodness-of-fit likelihood test on this data set cannot reject, at the significance level of 10 %, the hypothesis that these times to failure come from a Weibull distribution since H = 0,36 and $F_{0,1}(18\ ;\ 20)$ = 1,81. The MRR coefficient of determination is 93,9 %, above the critical 90 % value of 90,3 %. Both tests imply an acceptable, but not outstanding, fit.

The MLE/MRR values for β and η are $\hat{\beta}$ = 2,091/1,423 and $\hat{\eta}$ = 84/113.

The 90 % MLE/MRR confidence intervals are: [1,34/0,998 ; 2,742/2,029] for β and [70/79,05 ; 108/162,4] for η.

The MLE/MRR of B_{10} is 28,63/28,56 and the lower 90 % confidence limit for B_{10} is 20,43/23,29 (see Figure B.1). Note that as expected the MLE β is steeper than the MRR and the MLE B lives are optimistic compared to the MRR, even at the B10 level. At levels like B1 they are much more optimistic as shown in Table B.2. Note that t = 5,0 is approximately B1.

The MLE/MRR values for the reliability and their lower 90 % confidence limits for three arbitrary values of t are:

Table B.2 – Summary of results

t	$\hat{R}(t)$	$R_{0,9}\vert_{\text{lower limit}}$
5,0	99,7/98,8	98,5/96,8
50,00	0,71	0,62
100,00	0,23	0,12

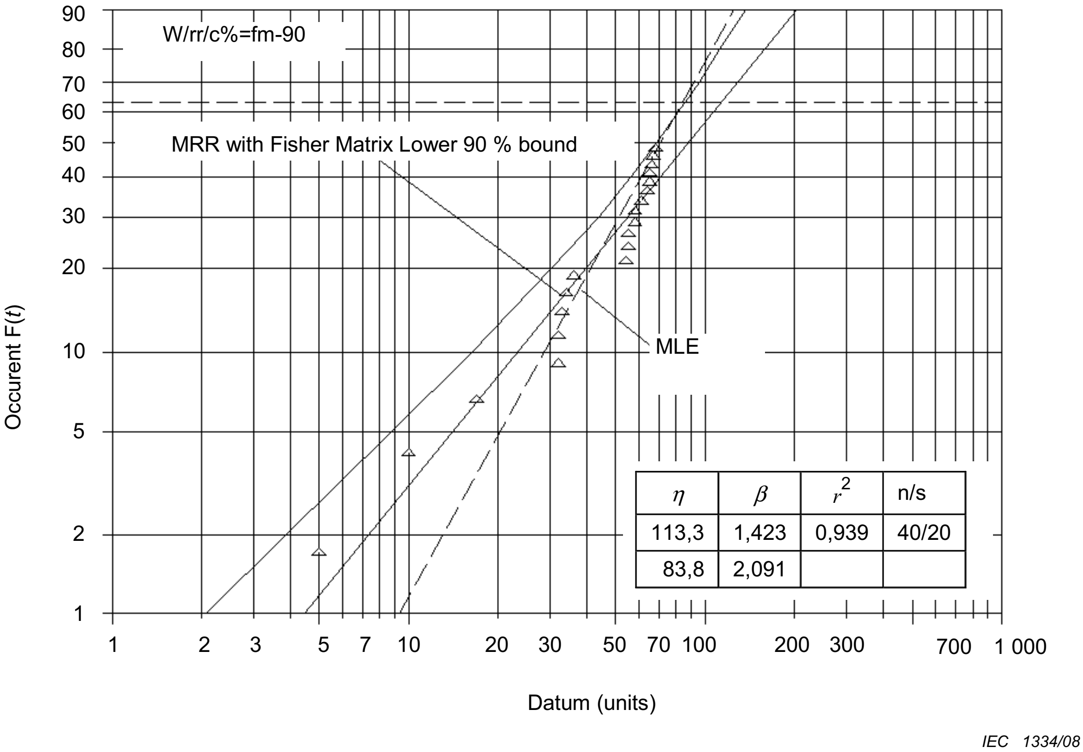


Figure B.1 – Plot of computations

Annex C
(informative)

Median rank tables

C.1 Median rank tables 5 % rank

Rank order	5 % ranks Sample size									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5,0	2,53	1,70	1,27	1,02	0,85	0,73	0,64	0,57	0,51
2		22,36	13,54	9,76	7,64	6,28	5,34	4,64	4,10	3,68
3			36,84	24,86	18,93	15,32	12,88	11,11	9,77	8,73
4				47,29	34,26	27,13	22,53	19,29	16,88	15,00
5					54,93	41,82	34,13	28,92	25,14	22,24
6						60,70	47,93	40,03	34,49	30,35
7							65,18	52,93	45,04	39,34
8								68,77	57,09	49,31
9									71,69	60,58
10										74,11

Rank order	5 % ranks Sample size									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,47	0,43	0,39	0,37	0,34	0,32	0,30	0,28	0,27	0,26
2	3,33	3,05	2,81	2,60	2,42	2,27	2,13	2,01	1,90	1,81
3	7,88	7,19	6,60	6,11	5,68	5,31	4,99	4,70	4,45	4,22
4	13,51	12,29	11,27	10,40	9,67	9,03	8,46	7,97	7,53	7,14
5	19,96	18,10	16,57	15,27	14,17	13,21	12,38	11,64	10,99	10,41
6	27,12	24,53	22,40	20,61	19,09	17,78	16,64	15,63	14,75	13,96
7	34,98	31,52	28,70	26,36	24,37	22,67	21,19	19,90	18,75	17,73
8	43,56	39,09	35,48	32,50	30,00	27,86	26,01	24,40	22,97	21,71
9	52,99	47,27	42,74	39,04	35,96	33,34	31,08	29,12	27,39	25,87
10	63,56	56,19	50,54	46,00	42,26	39,10	36,40	34,06	32,01	30,20
11	76,16	66,13	58,99	53,43	48,92	45,17	41,97	39,22	36,81	34,69
12		77,91	68,37	61,46	56,02	51,56	47,81	44,60	41,81	39,36
13			79,42	70,33	63,66	58,34	53,95	50,22	47,00	44,20
14				80,74	72,06	65,62	60,44	56,11	52,42	49,22
15					81,90	73,60	67,38	62,33	58,09	54,44
16						82,93	74,99	68,97	64,06	59,90
17							83,84	76,23	70,42	65,63
18								84,67	77,36	71,74
19									85,41	78,39
20										86,09

Rank order	5 % ranks Sample size									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0,24	0,23	0,22	0,21	0,20	0,20	0,19	0,18	0,18	0,17
2	1,72	1,64	1,57	1,50	1,44	1,38	1,33	1,28	1,24	1,20
3	4,01	3,82	3,65	3,50	3,35	3,22	3,10	2,98	2,88	2,78
4	6,78	6,46	6,17	5,90	5,66	5,43	5,22	5,03	4,85	4,69
5	9,88	9,41	8,98	8,59	8,23	7,90	7,59	7,31	7,05	6,81
6	13,24	12,60	12,02	11,49	11,01	10,56	10,15	9,77	9,42	9,09
7	16,82	15,99	15,25	14,57	13,95	13,38	12,85	12,37	11,92	11,50
8	20,57	19,56	18,63	17,80	17,03	16,33	15,68	15,09	14,53	14,02
9	24,50	23,27	22,16	21,16	20,24	19,40	18,62	17,91	17,25	16,63
10	28,58	27,13	25,82	24,64	23,56	22,57	21,66	20,82	20,05	19,33
11	32,81	31,13	29,61	28,24	26,99	25,84	24,79	23,83	22,93	22,11
12	37,19	35,25	33,51	31,94	30,51	29,21	28,01	26,91	25,89	24,95
13	41,72	39,52	37,54	35,76	34,14	32,66	31,31	30,07	28,93	27,87
14	46,41	43,91	41,68	39,68	37,86	36,21	34,70	33,31	32,03	30,85
15	51,26	48,45	45,95	43,71	41,68	39,84	38,16	36,62	35,20	33,89
16	56,30	53,15	50,36	47,86	45,61	43,57	41,71	40,00	38,44	36,99
17	61,56	58,02	54,90	52,13	49,64	47,38	45,34	43,46	41,75	40,16
18	67,08	63,09	59,61	56,53	53,78	51,30	49,05	47,00	45,12	43,39
19	72,94	68,41	64,51	61,09	58,05	55,32	52,86	50,62	48,57	46,69
20	79,33	74,05	69,64	65,82	62,46	59,46	56,77	54,33	52,10	50,06
21	86,71	80,19	75,08	70,77	67,04	63,74	60,79	58,13	55,71	53,49
22		87,27	80,98	76,02	71,83	68,18	64,94	62,03	59,40	57,01
23			87,79	81,71	76,90	72,81	69,24	66,06	63,20	60,61
24				88,27	82,39	77,71	73,73	70,23	67,11	64,30
25					88,71	83,02	78,47	74,58	71,16	68,10
26						89,12	83,60	79,18	75,39	72,04
27							89,50	84,15	79,84	76,14
28								89,85	84,66	80,47
29									90,19	85,14
30										90,50

C.2 Median rank tables 95 % rank

Rank order	95 % ranks Sample size									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	95,00	77,64	63,16	52,71	45,07	39,30	34,82	31,23	28,31	25,89
2		97,47	86,46	75,14	65,74	58,18	52,07	47,07	42,91	39,42
3			98,30	90,24	81,07	72,87	65,87	59,97	54,96	50,69
4				98,73	92,36	84,68	77,47	71,08	65,51	60,66
5					98,98	93,72	87,12	80,71	74,86	69,65
6						99,15	94,66	88,89	83,12	77,76
7							99,27	95,36	90,23	85,00
8								99,36	95,90	91,27
9									99,43	96,32
10										99,49

Rank order	95 % ranks Sample size									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	23,84	22,09	20,58	19,26	18,10	17,07	16,16	15,33	14,59	13,91
2	36,44	33,87	31,63	29,67	27,94	26,40	25,01	23,77	22,64	21,61
3	47,01	43,81	41,01	38,54	36,34	34,38	32,62	31,03	29,58	28,26
4	56,44	52,73	49,46	46,57	43,98	41,66	39,56	37,67	35,94	34,37
5	65,02	60,91	57,26	54,00	51,08	48,44	46,05	43,89	41,91	40,10
6	72,88	68,48	64,52	60,96	57,74	54,83	52,19	49,78	47,58	45,56
7	80,04	75,47	71,30	67,50	64,04	60,90	58,03	55,40	53,00	50,78
8	86,49	81,90	77,60	73,64	70,00	66,66	63,60	60,78	58,19	55,80
9	92,12	87,71	83,43	79,39	75,63	72,14	68,92	65,94	63,19	60,64
10	96,67	92,81	88,73	84,73	80,91	77,33	73,99	70,88	67,99	65,31
11	99,53	96,95	93,40	89,60	85,83	82,22	78,81	75,60	72,61	69,80
12		99,57	97,19	93,89	90,33	86,79	83,36	80,10	77,03	74,13
13			99,61	97,40	94,32	90,97	87,62	84,37	81,25	78,29
14				99,63	97,58	94,69	91,54	88,36	85,25	82,27
15					99,66	97,73	95,01	92,03	89,01	86,04
16						99,68	97,87	95,30	92,47	89,59
17							99,70	97,99	95,55	92,86
18								99,72	98,10	95,78
19									99,73	98,19
20										99,74

Rank order	95 % ranks Sample size									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	13,29	12,73	12,21	11,73	11,29	10,88	10,50	10,15	9,81	9,50
2	20,67	19,81	19,02	18,29	17,61	16,98	16,40	15,85	15,34	14,86
3	27,06	25,95	24,92	23,98	23,10	22,29	21,53	20,82	20,16	19,53
4	32,92	31,59	30,36	29,23	28,17	27,19	26,27	25,42	24,61	23,86
5	38,44	36,91	35,49	34,18	32,96	31,82	30,76	29,77	28,84	27,96
6	43,70	41,98	40,39	38,91	37,54	36,26	35,06	33,94	32,89	31,90
7	48,74	46,85	45,10	43,47	41,95	40,54	39,21	37,97	36,80	35,70
8	53,59	51,55	49,64	47,87	46,22	44,68	43,23	41,87	40,60	39,39
9	58,28	56,09	54,05	52,14	50,36	48,70	47,14	45,67	44,29	42,99
10	62,81	60,48	58,32	56,29	54,39	52,62	50,95	49,38	47,90	46,51
11	67,19	64,75	62,46	60,32	58,32	56,43	54,66	53,00	51,43	49,94
12	71,42	68,87	66,49	64,24	62,14	60,16	58,29	56,54	54,88	53,31
13	75,50	72,87	70,39	68,06	65,86	63,79	61,84	60,00	58,25	56,61
14	79,43	76,73	74,18	71,76	69,49	67,34	65,30	63,38	61,56	59,84
15	83,18	80,44	77,84	75,36	73,01	70,79	68,69	66,69	64,80	63,01
16	86,76	84,01	81,37	78,84	76,44	74,16	71,99	69,93	67,97	66,11
17	90,12	87,40	84,75	82,20	79,76	77,43	75,21	73,09	71,07	69,15
18	93,22	90,59	87,98	85,43	82,97	80,60	78,34	76,17	74,11	72,13
19	95,99	93,54	91,02	88,51	86,05	83,67	81,38	79,18	77,07	75,05
20	98,28	96,18	93,83	91,41	88,99	86,62	84,32	82,09	79,95	77,89
21	99,76	98,36	96,35	94,10	91,77	89,44	87,15	84,91	82,75	80,67
22		99,77	98,43	96,50	94,34	92,10	89,85	87,63	85,47	83,37
23			99,78	98,50	96,65	94,57	92,41	90,23	88,08	85,98
24				99,79	98,56	96,78	94,78	92,69	90,58	88,50
25					99,80	98,62	96,90	94,97	92,95	90,91
26						99,80	98,67	97,02	95,15	93,19
27							99,81	98,72	97,12	95,31
28								99,82	98,76	97,22
29									99,82	98,80
30										99,83

C.3 Median rank tables 50 % rank

Rank order	Median ranks (50 %) Sample size									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	50	29,29	20,63	15,91	12,94	10,91	9,43	8,30	7,41	6,70
2		70,71	50,00	38,57	31,38	26,44	22,85	20,11	17,96	16,23
3			79,37	61,43	50,00	42,14	36,41	32,05	28,62	25,86
4				84,09	68,62	57,86	50,00	44,02	39,31	35,51
5					87,06	73,56	63,59	55,98	50,00	45,17
6						89,09	77,15	67,95	60,69	54,83
7							90,57	79,89	71,38	64,49
8								91,70	82,04	74,14
9									92,59	83,77
10										93,30

Rank order	Median ranks (50 %) Sample size									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	6,11	5,61	5,19	4,83	4,52	4,24	4,00	3,78	3,58	3,41
2	14,80	13,60	12,58	11,70	10,94	10,27	9,68	9,15	8,68	8,25
3	23,58	21,67	20,04	18,65	17,43	16,37	15,42	14,58	13,83	13,15
4	32,38	29,76	27,53	25,61	23,94	22,47	21,18	20,02	18,99	18,05
5	41,19	37,85	35,02	32,58	30,45	28,59	26,94	25,47	24,15	22,97
6	50,00	45,95	42,51	39,54	36,97	34,71	32,70	30,92	29,32	27,88
7	58,81	54,05	50,00	46,51	43,48	40,82	38,47	36,37	34,49	32,80
8	67,62	62,15	57,49	53,49	50,00	46,94	44,23	41,82	39,66	37,71
9	76,42	70,24	64,98	60,46	56,52	53,06	50,00	47,27	44,83	42,63
10	85,20	78,33	72,47	67,42	63,03	59,18	55,77	52,73	50,00	47,54
11	93,89	86,40	79,96	74,39	69,55	65,29	61,53	58,18	55,17	52,46
12		94,39	87,42	81,35	76,06	71,41	67,30	63,63	60,34	57,37
13			94,81	88,30	82,57	77,53	73,06	69,08	65,51	62,29
14				95,17	89,06	83,63	78,82	74,53	70,68	67,20
15					95,48	89,73	84,58	79,98	75,85	72,12
16						95,76	90,32	85,42	81,01	77,03
17							96,00	90,85	86,17	81,95
18								96,22	91,32	86,85
19									96,42	91,75
20										96,59

Rank order	Median ranks (50 %) Sample size									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	3,25	3,10	2,97	2,85	2,73	2,63	2,53	2,45	2,36	2,28
2	7,86	7,51	7,19	6,90	6,62	6,37	6,14	5,92	5,72	5,53
3	12,53	11,97	11,46	10,99	10,55	10,15	9,78	9,44	9,11	8,81
4	17,21	16,44	15,73	15,09	14,49	13,94	13,43	12,96	12,52	12,10
5	21,89	20,91	20,01	19,19	18,43	17,74	17,09	16,48	15,92	15,40
6	26,57	25,38	24,30	23,30	22,38	21,53	20,74	20,01	19,33	18,69
7	31,26	29,86	28,58	27,41	26,32	25,32	24,40	23,54	22,74	21,99
8	35,94	34,33	32,86	31,51	30,27	29,12	28,06	27,07	26,14	25,28
9	40,63	38,81	37,15	35,62	34,22	32,92	31,71	30,59	29,55	28,58
10	45,31	43,29	41,43	39,73	38,16	36,71	35,37	34,12	32,96	31,87
11	50,00	47,76	45,72	43,84	42,11	40,51	39,03	37,65	36,37	35,17
12	54,69	52,24	50,00	47,95	46,05	44,31	42,68	41,18	39,77	38,46
13	59,37	56,71	54,28	52,05	50,00	48,10	46,34	44,71	43,18	41,76
14	64,06	61,19	58,57	56,16	53,95	51,90	50,00	48,24	46,59	45,06
15	68,74	65,67	62,85	60,27	57,89	55,69	53,66	51,76	50,00	48,35
16	73,43	70,14	67,14	64,38	61,84	59,49	57,32	55,29	53,41	51,65
17	78,11	74,62	71,42	68,49	65,78	63,29	60,97	58,82	56,82	54,94
18	82,79	79,09	75,70	72,59	69,73	67,08	64,63	62,35	60,23	58,24
19	87,47	83,56	79,99	76,70	73,68	70,88	68,29	65,88	63,63	61,54
20	92,14	88,03	84,27	80,81	77,62	74,68	71,94	69,41	67,04	64,83
21	96,75	92,49	88,54	84,91	81,57	78,47	75,60	72,93	70,45	68,13
22		96,90	92,81	89,01	85,51	82,26	79,26	76,46	73,86	71,42
23			97,03	93,10	89,45	86,06	82,91	79,99	77,26	74,72
24				97,15	93,38	89,85	86,57	83,52	80,67	78,01
25					97,27	93,63	90,22	87,04	84,08	81,31
26						97,37	93,86	90,56	87,48	84,60
27							97,47	94,08	90,89	87,90
28								97,55	94,28	91,19
29									97,64	94,47
30										97,72

C.4 Generating ranks using a spreadsheet program

Ranks can be generated in a spreadsheet program using the following function:

BETAINV(C, J, N-J+1)

where

C is the confidence level;

J is the rank order;

N is the sample size.

Annex D
(normative)

Statistical tables

D.1 Table of the gamma function

Table D.1 is used in conjunction with 9.7.

Table D.1 – Values of the gamma function

β	$\Gamma(1+1/\beta)$	β	$\Gamma(1+1/\beta)$	β	$\Gamma(1+1/\beta)$
0,20	120	1,50	0,902 7	3,60	0,9011
0,25	24	1,55	0,899 4	3,70	0,9024
0,30	9,2603	1,60	0,896 6	3,80	0,9038
0,35	5,0295	1,65	0,894 2	3,90	0,9051
0,40	3,3233	1,70	0,892 2	4,00	0,9064
0,45	2,5055	1,75	0,890 6	4,10	0,9076
0,50	2,0000	1,80	0,889 2	4,20	0,9089
0,55	1,7024	1,85	0,888 2	4,30	0,9101
0,60	1,5045	1,90	0,887 4	4,40	0,9113
0,65	1,3603	1,95	0,886 7	4,50	0,9125
0,70	1,2657	2,00	0,886 2	4,60	0,9137
0,75	1,1906	2,10	0,885 7	4,70	0,9149
0,80	1,1330	2,20	0,885 6	4,80	0,9160
0,85	1,0878	2,30	0,885 9	4,90	0,9171
0,90	1,0522	2,40	0,886 5	5,00	0,9182
0,95	1,0238	2,50	0,887 2	5,20	0,9202
1,00	1,0000	2,60	0,888 2	5,40	0,9222
1,05	0,9808	2,70	0,889 3	5,60	0,9241
1,10	0,9649	2,80	0,890 3	5,80	0,9260
1,15	0,9517	2,90	0,891 7	6,00	0,9277
1,20	0,9406	3,00	0,893 0	6,20	0,9293
1,25	0,9314	3,10	0,894 3	6,40	0,9309
1,30	0,9236	3,20	0,895 6	6,60	0,9325
1,35	0,9169	3,30	0,897 0	6,80	0,9340
1,40	0,9114	3,40	0,898 4	7,00	0,9354
1,45	0,9067	3,50	0,899 7	8,00	0,9417

D.2 Fractiles of the normal distribution

Table D.2 gives values of the fractiles of the normal distribution u_p for commonly required values of the argument p.

Table D.2 – Fractiles of the normal distribution

p	0,010	0,025	0,050	0,100
u_p	2,326 3	1,960 0	1,644 9	1,281 6

Annex E
(informative)

Spreadsheet example

E.1 Example of Weibull analysis using a spreadsheet

Table E.1 – Practical analysis example

	A	B	C	D	E
1	Failure No. i	Failure time t_i	Median rank, $F_i(t)$ = $(i - 0{,}3)/(n + 0{,}4)$	X =ln(t)	Y =ln$(1/\ln(1-F(t)))$
2	1	12	0,067 3	2,484 9	-2,663 8
3	2	20	0,163 5	2,995 7	-1,723 3
4	3	34	0,259 6	3,526 4	-1,202 0
5	4	65	0,355 8	4,174 4	-0,821 7
6	5	91	0,451 9	4,510 9	-0,508 6
7	6	134	0,548 1	4,897 8	-0,230 4
8	7	178	0,644 2	5,181 8	0,032 9
9	8	246	0,740 4	5,505 3	0,299 0
10	9	378	0,836 5	5,934 9	0,594 0
11	10	512	0,932 7	6,238 3	0,992 7
12	Regress X on Y, since there is more uncertainty in t			Alternative method, if more uncertainty in Y	
13	y = 1,111 5 x + 5,126 5			y = 0,8839x - 4,5403	
14	R^2 = 0,982 4			R^2 = 0,9824	
15	Intercept	5,1265		intercept	-4,540 3
16	β	0,8997		β	0,883 9
17	η	168,42		η	170,15
18					

Method	Equation	Spreadsheet model	β	η
X on Y (Standard)	$(1/\beta)$ ln(-ln$(1-F)$) + ln(η)= ln(t)	y = 1,111 5 x - 5,126 5	= 1/1,115 = 0,899 7	=exp(5,1265) =168,42
Y on X (Special)	ln(-ln$(1- F)$) = βln(t) -βln(η)	y = 0,883 9 x - 4,540 3	= 0,883 9	=exp(4,5403/0,8839) = 170,15

Cells shaded in Table E.1 are selected for a plot. The plot type is scattered, without lines. Once the scattered graph is completed, the data are fitted with a straight regression line, and the fitting selection should specify the equation of the fitted line to be displayed on the graph along with the correlation coefficient, R^2, value. The plot obtained is shown in Figure E.1. It is convenient to copy the equation from the plot onto the data sheet for calculation of the scale parameter, as shown on the bottom of the Table E.1. The LINEST function in a spreadsheet model can also be used to calculate the fit.

There is usually more uncertainty with the time to failure, t, and less uncertainty with the failure number. Least squares regression should regress the variable with more uncertainty against the variable with less uncertainty. Commercial software will regress X on Y instead of the customary Y on X often used in spreadsheet linear plots. The rows on the bottom of Table E.1 show the comparison between the two methods.

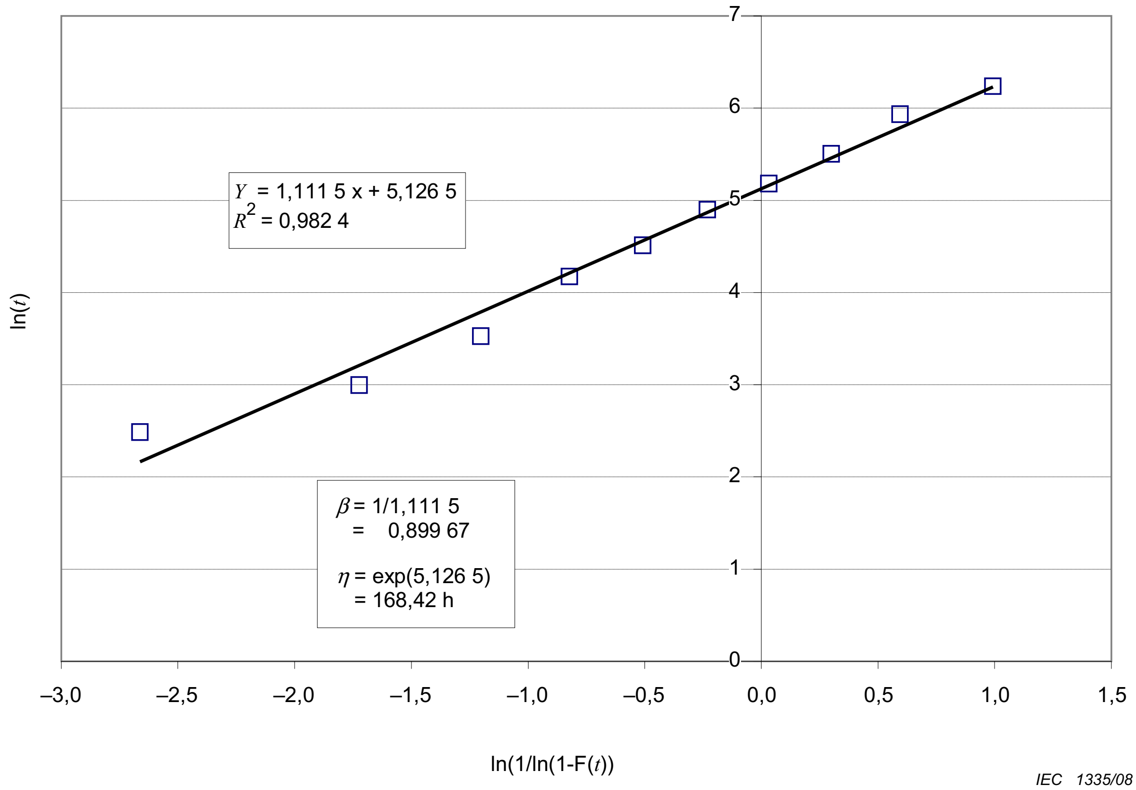


Figure E.1 – Weibull plot for graphical analysis

The slope of the line in the plot defines the shape parameter, β, and the scale parameter, η. These are calculated as shown in Table E.1.

E.2 Example using suspended data

Censored or suspended data, especially when large, can be analysed using a computer spreadsheet, much in a similar way as was shown in the previous section for spreadsheet Weibull analysis. The difference is that the order number which is used for the calculation of median rank, previously designated as *i,* is modified to account for suspensions using the following expressions:

$$i_{t_i} = i_{t_{i-1}} + m_{t_i}$$

$$m_{t_i} = \frac{(n+1) - i_{t_{i-1}}}{1 + (n - \text{number of preceding items})}$$

$$F_i(t_i) = \frac{i_{t_i} - 0{,}3}{n + 0{,}4}$$

The relationship between the above two equations, $i_{t_i} = i_{t_{i-1}} + m_{t_i}$ and m_{t_i} are derived from Equation (7) of 7.2.3.

Tables E.2 and E.3 below show how a spreadsheet is to be set up for a given set of data.

Table E.2 – Spreadsheet set-up for analysis of censored data

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Event number** *j*	**Adjusted failure No.** *i*	**Event time** t_i	**Event**	**Adjusted rank** $F_i(t)$ **(*i* - 0,3)/(*n* + 0,4)**	x	y
2	1	=A2	t_1	F	=(B2-0,3)/($A12+0,4)	ln(C2)	ln{ln[1/(1-E2)]}
3	2		t_2	S			
4	3		t_3	S			
5	4	=B2+((A12+1)-B2)/(1+(A12-A4))	t_4	F	=(B5-0,3)/($A12+0,4)	ln(C5)	ln{ln[1/(1-E5)]}
6	5	=B5+((A12+1)-B5)/(1+(A12-A5))	t_5	F	=(B6-0,3)/($A12+0,4)	ln(C6)	ln{ln[1/(1-E6)]}
7	6		t_6	S	,		
8	7	=B6+((A12+1)-B6)/(1+(A12-A7))	t_7	F	=(B8-0,3)/($A12+0,4)	ln(C8)	ln{ln[1/(1-E8)]}
9	8		t_8	S			
10	9	=B8+((A12+1)-B8)/(1+(A12-A9))	t_9	F	=(B10-0,3)/($A12+0,4)	ln(C10)	ln{ln[1/(1-E10)]}
11	10	=B10+((A12+1)-B10)/(1+(A12-A10))	t_{10}	F	=(B11-0,3)/($A12+0,4)	ln(C11)	ln{ln[1/(1-E11)]}
12	11		t_{11}	S			

Table E.3 – Example of Weibull analysis for suspended data

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Event number** *j*	**Failure No.** ***i***	**Failure time** t_i	**Event**	**Median rank, $F_i(t)$ (*i* - 0,3)/ (*n* + 0,4)**	x	y
2	1	1,000 0	12	F	0,0614	2,484 9	-2,758 8
3	2		20	S			
4	3		34	S			
5	4	2,222 2	65	F	0,168 6	4,174 4	-1,689 2
6	5	3,444 4	91	F	0,275 8	4,510 9	-1,130 9
7	6		134	S			
8	7	4,870 4	178	F	0,400 9	5,181 8	-0,668 8
9	8		246	S			
10	9	6,652 8	378	F	0,557 3	5,934 9	-0,204 8
11	10	8,435 2	450	F	0,713 6	6,109 2	0,223 5
12	11		512	S			
13							
14		y = 1,230 5x + 6,010 2					
15		R^2 = 0,9833					
16		Intercept	6,010 2				
17		β	0,812 7	= 1/1,230 5			
18		η	407,55	= exp(6,010 2)			
19							

The Weibull plot from the above example is shown in Figure E.2.

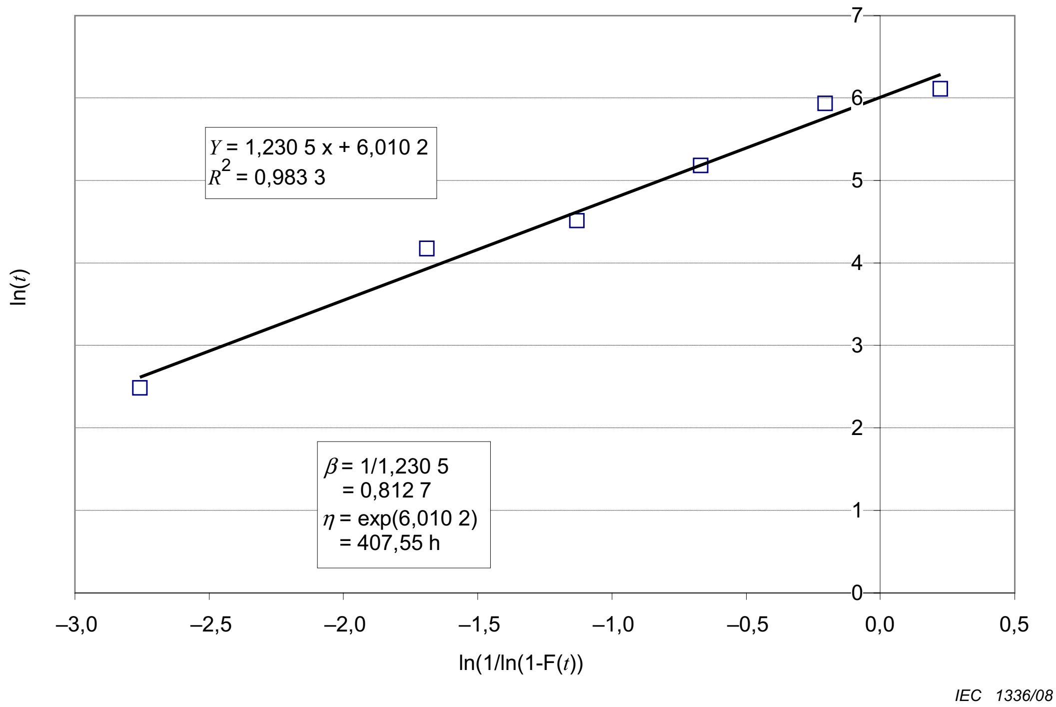


Figure E.2 – Weibull plot of censored data

E.3 Hazard plotting example 1

Another suitable way to analyse data with suspensions is to plot the cumulative hazard function. The plotted points correspond to the failure times, but the cumulative hazard calculation accounts for the suspensions. This method is considerably simpler than adjustment of the failure numbers, producing comparable results. IEC 61810-2 describes how to perform hazard plotting.

The spreadsheet with hazard plotting to account for suspensions is shown in Tables E.4 and E.5.

Table E.4 – Example of spreadsheet application for censored data

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Event number** i	**Event time** t_i	**Event**	**Reverse rank**	**Hazard function** $h(t)$	**Cumulative hazard** $H(t)$	**ln(t)**	**ln($H(t)$)**	**F(t)**
2	1	t_1	Failed	11	=1/D2	=E2	=LN(B2)	=LN(F2)	=1-EXP(-F2)
3	2	t_2	Censored	10					
4	3	t_3	Censored	9					
5	4	t_4	Failed	8	=1/D5	=F2+E5	=LN(B5)	=LN(F5)	=1-EXP(-F5)
6	5	t_5	Failed	7	=1/D6	=F5+E6	=LN(B6)	=LN(F6)	=1-EXP(-F6)
7	6	t_6	Censored	6					
8	7	t_7	Failed	5	=1/D8	=F6+E8	=LN(B8)	=LN(F8)	=1-EXP(-F8)
9	8	t_8	Censored	4					
10	9	t_9	Failed	3	=1/D10	=F8+E10	=LN(B10)	=LN(F10)	=1-EXP(-F10)
11	10	t_{10}	Failed	2	=1/D11	=F10+E11	=LN(B11)	=LN(F11)	=1-EXP(-F11)
12	11	t_{11}	Censored	1					

Table E.5 – Example spreadsheet

Time to failure t	Number	Event	Reverse rank	Hazard function h(t)	Cumulative hazard H(t)	ln(t)	ln(H(t))	F(t)
12	1	Failed	11	0,091	0,091	2,485	-2,398	0,087
20	2	Censored	10					
34	3	Censored	9					
65	4	Failed	8	0,125	0,216	4,174	-1,533	0,194
91	5	Failed	7	0,143	0,359	4,511	-1,025	0,301
134	6	Censored	6					
178	7	Failed	5	0,200	0,559	5,182	-0,582	0,428
246	8	Censored	4					
378	9	Failed	3	0,333	0,892	5,935	-0,114	0,590
450	10	Failed	2	0,500	1,392	6,109	0,331	0,751
512	11	Censored	1					

Plot (LN is the natural logarithm) LN cumulative hazard against LN time giving Figure E.3.

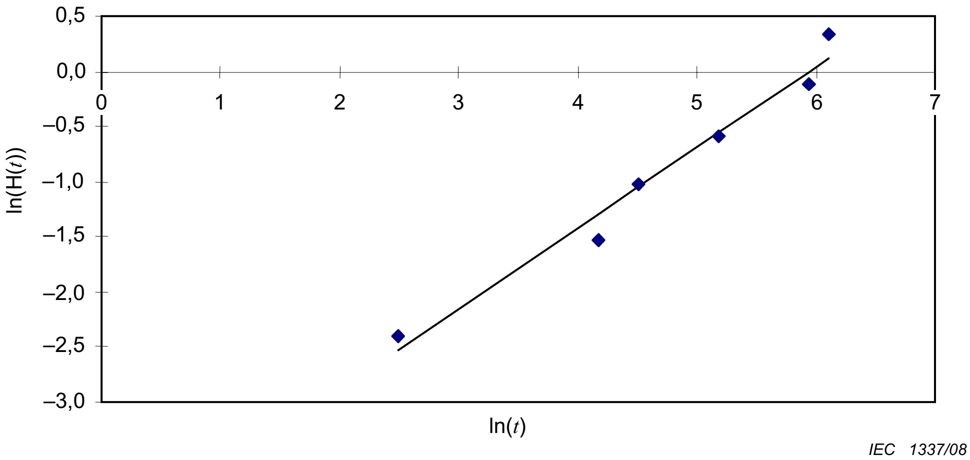


Figure E.3 – Cumulative hazard plot for data of Table E.4

From the regression analysis of ln[H(t)] on ln(t), a straight line fitted to the data is:

$$\ln[\mathrm{H}(t)] = 0{,}729 \ln(t) - 4{,}338$$

with $R^2 = 0{,}973$. The parameter estimates are:

$$\beta = 0{,}729$$

and

$$\eta = \mathrm{e}^{\left(\frac{4{,}338}{0{,}729}\right)} = 384$$

E.4 Hazard plotting example 2

Both the hazard plotting technique and the technique described in 7.3 can analyse data sets with multiple modes of failure, by treating failure modes other than that to be analyzed as censorings. The following data set, provided by IEC/TC94, is the result of the reliability experiments on a relay. The lifetime scale is measured with the number of switching times. This relay suffered from two failure modes, weldings (mode 1) and erosion contacts (mode 2).

Table E.6 shows the data set along with an example to estimate the cumulative hazard function for failure mode 1. In analysing failure records with mode 1, those with mode 2 are treated as censored.

Table E.6 – A relay data provided by ISO/TC94 and Hazard analysis for failure mode 1

Times	Number	Event	Reverse rank	Hazard function h1(*t*)	Cumulative hazard H1(*t*)	ln(*t*)	ln(H1(*t*))	F1(*t*)
984 182	1	Failed - mode 1	30	0,033	0,033	13,800	-3,401	0,033
103 598 9	2	Failed - mode 1	29	0,034	0,068	13,851	-2,691	0,066
108 632 0	3	Failed - mode 1	28	0,036	0,104	13,898	-2,268	0,098
116 708 2	4	Failed - mode 2	27					
116 843 7	5	Failed - mode 2	26					
119 624 3	6	Failed - mode 2	25					
119 895 4	7	Failed - mode 1	24	0,042	0,145	13,997	-1,930	0,135
123 715 8	8	Failed - mode 2	23					
126 636 3	9	Failed - mode 1	22	0,045	0,191	14,052	-1,657	0,174
128 005 4	10	Failed - mode 2	21					
129 248 1	11	Failed - mode 2	20					
130 758 8	12	Failed - mode 1	19	0,053	0,243	14,084	-1,414	0,216
130 857 5	13	Failed - mode 2	18					
134 196 6	14	Failed - mode 2	17					
136 270 8	15	Failed - mode 1	16	0,063	0,306	14,125	-1,185	0,263
142 846 6	16	Failed - mode 1	15	0,067	0,372	14,172	-0,988	0,311
143 192 3	17	Failed - mode 2	14					
143 327 1	18	Failed - mode 1	13	0,077	0,449	14,175	-0,800	0,362
145 822 6	19	Failed - mode 2	12					
146 155 9	20	Failed - mode 2	11					
152 838 6	21	Failed - mode 2	10					
156 312 3	22	Failed - mode 2	9					
162 708 2	23	Failed - mode 2	8					
205 187 7	24	Failed - mode 2	7					
224 022 4	25	Failed - mode 1	6	0,167	0,616	14,622	-0,484	0,460
231 958 5	26	Failed - mode 1	5	0,200	0,816	14,657	-0,203	0,558
247 604 7	27	Failed - mode 1	4	0,250	1,066	14,722	0,064	0,656
248 000 0	28	Censored	3					
248 000 0	29	Censored	2					
248 000 0	30	Censored	1					

Similar analysis is performed on the failure mode 2 and the resulting plots and the fitted lines are shown in Figure E.4.

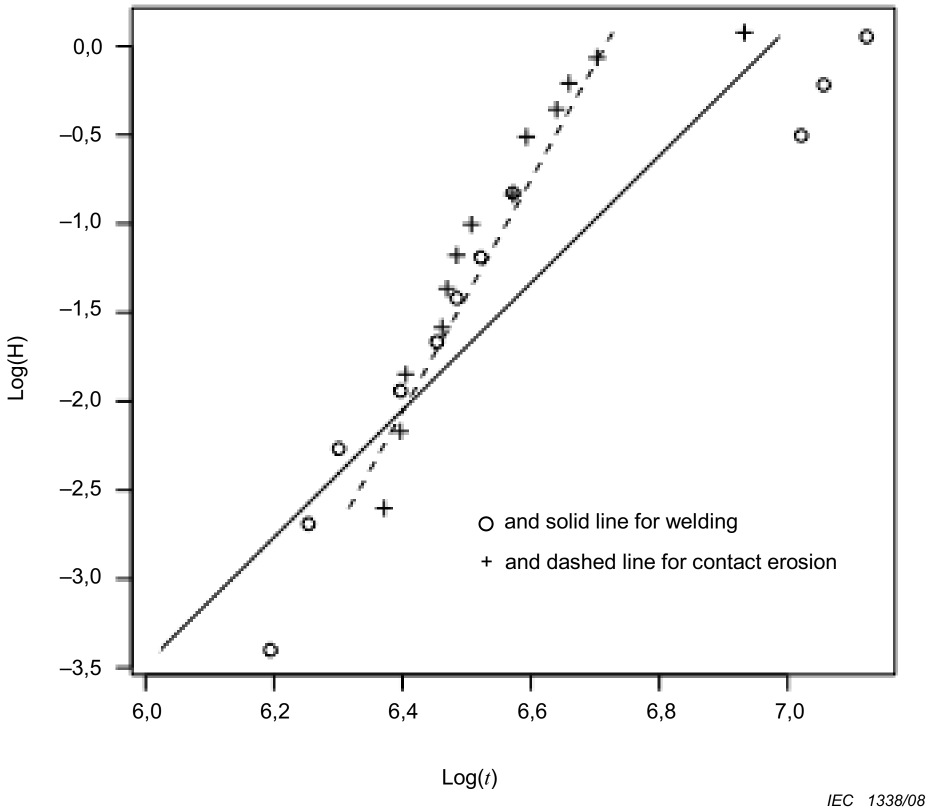


Figure E.4 – Cumulative hazard plots for Table E.6

The estimated parameters are $\beta_1 = 3{,}59$, $\eta_1 = 1066$, $\beta_2 = 6{,}53$ and $\eta = 825$, respectively.

Annex F
(informative)

Example of Weibull probability paper

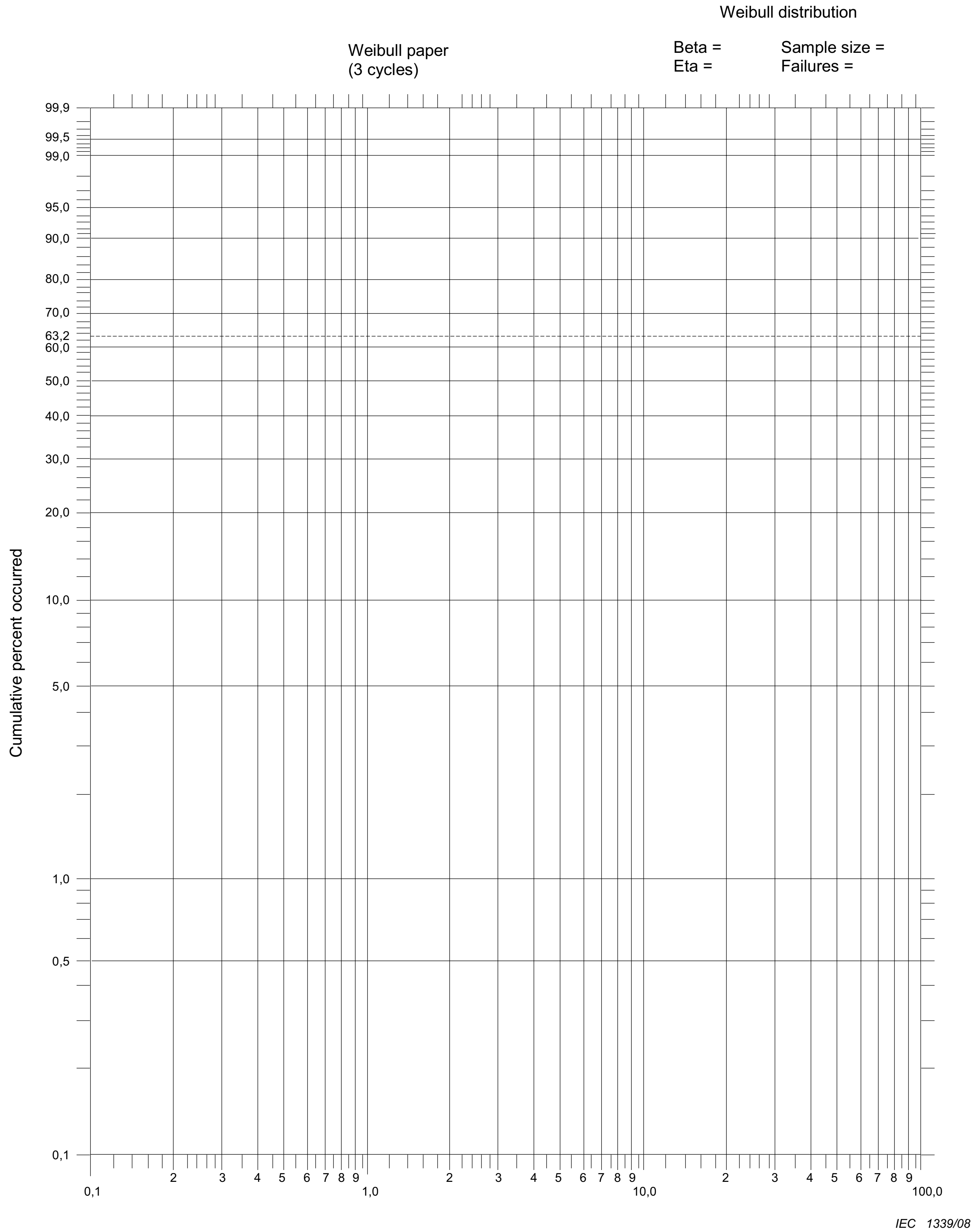


Figure F.1 – Weibull probability paper

Annex G
(informative)

Mixtures of several failure modes

G.1 Description

A Weibull plot containing a dogleg bend is a clue to the potential of multiple competitive failure modes. An example of this was a problem in a compressor start bleed system. Upon examination of the data, 10 out of 19 failures had occurred at one installation base. It was concluded that the location of this base was contributing to the problem. The base was located on the ocean and the salt air was the factor. The data were categorized into separate Weibull plots with this engineering knowledge. The first Weibull had a slope of 0,75. This could be considered an infant mortality problem, while the ocean base Weibull had a stress corrosion wear-out failure mechanism with β = 11,9. More attention to maintenance resolved the problem.

Dogleg Weibulls are caused by mixtures of more than one failure mode. These are usually competitive failure modes, competing to produce failure. However there are several types of mixtures described in this annex. For instance, fuel pump failures can be due to bearings, housing cracks, leaks, etc. If these different failure modes are plotted on one Weibull plot, one or more dogleg bends will result. When this occurs, a close examination of the failed parts is the best way to separate the data into different failure modes. If this is done correctly, separate good Weibulls will result. There can be mixtures of modes and populations, perhaps batches and competing failure modes. A steep slope followed by a shallow slope usually indicates a batch problem, as there are some "perpetual survivors" that are not subject to the failure mode. For example, there may be defects in some, but not all, parts; a batch problem.

It is always preferable to separate the failure modes based on analysis of the parts (and environment) and to analyse them separately, rather than rely on statistical methods.

Supposing a data set of 50 parts, and 20 of them have one failure mode and the other 30 have a different failure mode. The first set should be analysed as 20 failures (of F_1) and 30 suspensions (for F_2). The second set would be 30 failures (of F_2) and 20 suspensions (for F_1). These two sets of parameters can then be used to predict the cumulative failure distribution.

When parts are not available for physical analysis, the data may be split into groups based on plotting position. This can cause errors, because a small percentage of wear-out failures will occur at an "early" life, and a percentage of infant mortality failures will occur at later life.

A minimum of 20 failures is needed for credible results from a mixture of two failure modes, and 50 or more failures for the other mixtures.

The following are brief descriptions of the more common methods for handling mixtures:

– p indicates the portion or batch of the total population that has a particular failure distribution (F_1 in the simple mixture);
– F_1, F_2, and F_3 indicate failure distributions;
– R_1, R_2 a-nd R_3 are the corresponding reliability distributions;

The population cumulative failure distributions are F and R.

The descriptions are given without describing the particular distribution shape (e.g. Weibull, log-normal, normal, or exponential). An appropriate distribution shape needs to be substituted for each F_n.

G.2 Competing risk

$$F = 1 - (1 - F_1)(1 - F_2) \tag{G.1}$$

Competing risk occurs when a population has two or more failure modes and the entire population is at risk from either failure mode. Even though a Weibull plot of these data will appear curved, this is not a mixture of subpopulations; it is a homogeneous population. If one defines a mixture to be a mixture of failure modes, then this model would be a mixture as well, since there are two different failure modes.

NOTE This is simply a series reliability problem: $R = R_1 \cdot R_2$.

An example of competing risk is an ASIC component in a plastic encapsulation with micro BGA solder connections. The ASIC may fail through crack propagation in the solder balls or through moisture penetration through the plastic. The two failure modes are independent of each other, but will compete in causing the ASIC to fail.

G.3 Simple mixture

$$F = pF_1 + (1 - p)F_2 \tag{G.2}$$

This is a mixture of two independent subpopulations with no common failure modes. Each subpopulation has its own unique failure modes.

Although listed as a simple mixture, there are very few applications that truly fit this model. Most mixtures have at least one common failure mode. The simple mixture may be used as an approximation for more complex distributions, such as the competing risk mixture, described in Clause G.4. An example could be the solder balls of the micro BGA of the ASIC. Some of the solder balls have one or more voids. A crack will propagate to the void reducing the life time significantly, compared to the solder balls where the crack has to propagate through the whole length of the solder.

G.4 Competing risk mixture

$$F = p[1 - (1 - F_1)(1 - F_2)] + (1 - p)F_2 \tag{G.3}$$

Most mixtures of subpopulations are competing risk mixtures. There is at least one failure mode (F_1) that is unique to one subpopulation, and there is a failure mode (F_2) that is common to both subpopulations.

In this case, one subpopulation is subject to failure modes 1 and 2, as indicated by the portion of the equation in brackets [ ]. This subpopulation by itself has competing risk. As an example, a tyre of a car may wobble due to being out of round (F_1), but the tyre may also get a puncture. In both situations, the tyres are within specification of roundness and the tyre that wobbled may get a puncture. So it is possible to get a puncture (F_2) on the way to the dealer to have the wobbling tyre replaced.

Mixtures of more than three failure modes will have a better fit, the doglegs will disappear and β will tend toward one. Thus Weibulls for a system or component with many modes mixed together will tend toward a β of one. These Weibulls should not be employed if there is any way to categorize the data into separate, more accurate failure modes. Using a Weibull plot with mixtures of many failure modes is the equivalent of assuming the exponential distribution applies. Exponential results are often misleading and yet this is common practice.

Annex H
(informative)

Three-parameter Weibull example

H.1 Example

Figure H.1 is a typical example of a three-parameter Weibull distribution using fracture toughness of steel plate as the data of interest. The model indicates it is physically impossible to fail the plate at a low level of stress (see Figure H.2 for the effect of the t_0 shift). There are many possible reasons for an origin shift. The manufacturer may have put time or mileage on the system as part of production acceptance, but reported that the items are "zero time." The purpose of production acceptance is to eliminate the infant mortality failures. Electronic components may be subjected to burn-in or environmental stress screening for the same purpose. In these cases, the items have aged before being delivered as "zero time" systems. Spare parts such as rubber, chemicals and ball bearings may age in storage and use part of their life on the shelf, requiring a negative t_0. For material properties, where the Weibull abscissa is stress or strain, it may be impossible for fracture or creep or other properties to produce failure near the origin on the scale.

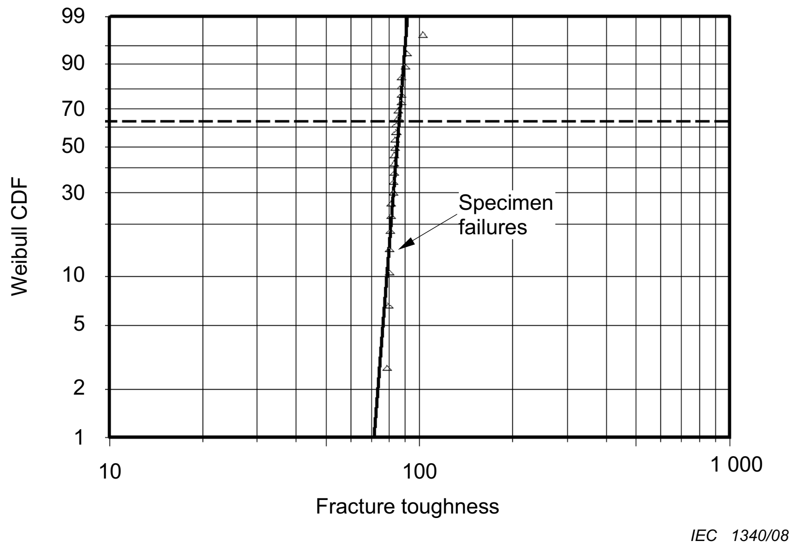
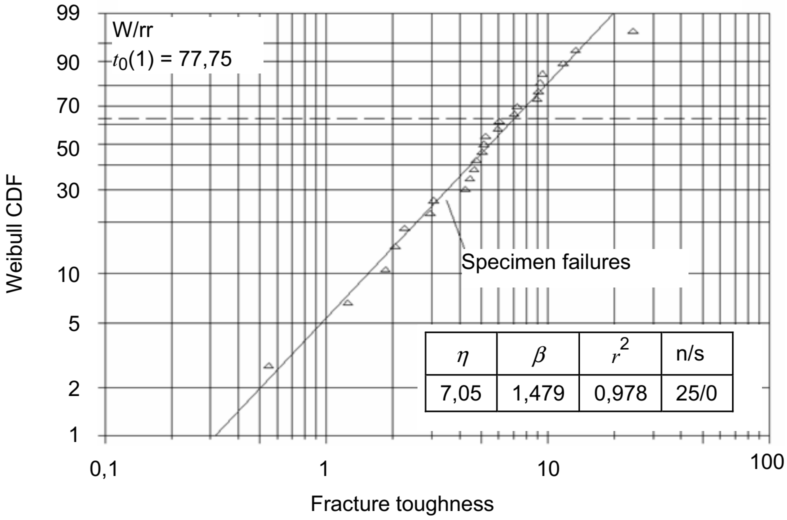


Figure H.1 – Steel-fracture toughness – Curved data



IEC 1341/08

Figure H.2 – t_0 improves the fit of Figure H.1 data

For these reasons and others, the Weibull plot may be curved and needs an origin shift, from zero to t_0.

Three parameters, t_0, β and η, are included in the Weibull cumulative distribution function as shown in Equation (H.1):

$$F(t) = 1 - e^{-((t-t_0)/\eta)^{\beta}} \tag{H.1}$$

where

t is the failure time;

t_0 is the starting point or origin of the distribution.

When the t_0 correction is applied to the data, the resulting plot will follow a straight line if the correction is appropriate. Figure H.2 shows the fracture data in Figure H.1 with the t_0 correction. Note that the Weibull ordinate scale and the characteristic life are now in the t_0 domain. To convert back to real time, add t_0 back.

Annex I
(informative)

Constructing Weibull paper

I.1 Weibull probability plotting paper

All probability papers have scales that transform the cumulative distribution function into a straight line. If data are plotted on the transformed scale and if they conform to a straight line, then this supports the contention that the distribution is appropriate.

Weibull graph paper can be constructed using the transformation as described in the following paragraphs.

The Weibull distribution may be defined mathematically as shown in Equation (I.1):

$$\mathrm{F}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-(t/\eta)^{\beta}} \tag{I.1}$$

where F(t) defines the cumulative fraction of items that will fail by a time t. The fraction of items that has not failed up to time t is 1 – F(t).

This can be written as (I.2):

$$\frac{1}{1-\mathrm{F}(t)} = \mathrm{e}^{(t/\eta)^{\beta}} \tag{I.2}$$

Taking natural logarithms of both sides twice (decimal logarithms can also be used) gives an equation of a straight line, as shown in (I.3) below:

$$\ln\left[\ln\left[\frac{1}{1-\mathrm{F}(t)}\right]\right] = \beta\ln(t) - \beta\ln(n) \tag{I.3}$$

The equation above is a straight line of the form $y = mx + \mathrm{c}$. Weibull paper is constructed by plotting the cumulative probability of failure using a log-log reciprocal scale against t on a log scale. The slope of the straight line plotted in this manner will be the shape parameter, β, as shown in (I.4).

$$y = \ln\left[\ln\left[)\frac{1}{1-\mathrm{F}(t)}\right]\right]$$

$$m=\beta \tag{I.4}$$

$$x=\ln(t)$$

$$c=-\beta\cdot\ln(\eta)$$

The scale parameter is then calculated from the intercept (value of y for $x = \ln(t) = 0$, i.e. for $t = 1$) as shown in Equation (I.5):

$$\eta = \mathrm{e}^{-\frac{\text{intercept}}{\beta}} \tag{I.5}$$

Table I.1 – Construction of ordinate (Y)

F(t)	lnln(1/(1 - F(t)))	Col 2 Value + 6,91
0,001	–6,91	0
0,010	–4,60	2,31
0,1	–2,25	4,66
0,5	–0,37	6,54
0,9	0,83	7,74
0,99	1,53	8,44
0,999	1,93	8,84

Table I.2 – Construction of abscissa (t)

t h	ln(t)
1	0
2	0,69
3	1,10
4	1,39
5	1,61
10	2,30
15	2,71
20	3,00
100	4,61
1 000	6,91

The Weibull parameter β is estimated by measuring the slope of the line on the Weibull paper or plot.

MRR is the technique which combines the median rank as a plotting position and the least square regression on the Weibull paper as a fitting criterion.

I.2 Using a spreadsheet to construct Weibull plots

Weibull analysis can be carried out using any commercial spreadsheet computer software in a manner similar to the construction of the probability paper. Here, the paper is not prepared for manual plotting, but the spreadsheet graph presents the data in a manner appropriate for determination of Weibull parameters using linear regression.

Table I.3 – Content of data entered into a spreadsheet

Failure No. i	Failure time t_i	Median rank F$_i$(t) (i - 0,3)/(n+0,4)	x_i	y_i
1	t_1	(1-0,3)/(n+0,4)	ln(t_1)	ln{ln[1/(1-F$_1$(t)]}
2	t_2	(2-0,3)/(n +0,4)	ln(t_2)	ln{ln[1/(1-F$_2$(t)]}
3	t_3	(3-0,3)/(n +0,4)	ln(t_3)	ln{ln[1/(1-F$_3$(t)]}
4	t_4	(4-0,3)/(n+0,4)	ln(t_4)	ln{ln[1/(1-F$_4$(t)]}
.	.	.	.	
.	.	.	.	
i	t_i	(i-0,3)/(n+0,4)	ln(t_i)	ln{ln[1/(1-F$_i$(t)]}
.	.	.	.	
.	.	.	.	
n	t_n	(n-0,3)/(n+0,4)	ln(t_n)	ln{ln[1/(1-F$_n$(t)]}

A practical example is shown in Annex E.

I.3 Commercial software

Commercial software is also available for analysis and Weibull plotting.

Annex J
(informative)

Technical background and references

Annex J gives information on the origin of the procedures of Clause 9 of this standard. The references quoted are all listed in Clause J.5.

J.1 Goodness-of-fit test

This is the Mann-Scheuer-Fertig (1973) test in the form presented by Lawless (1982). The expected values of the standard extreme value order statistics, necessary for the calculation of the ℓ_i, in 9.5, have been approximated as suggested by Blom (1958). This test has been shown to have power comparable to the Shapiro and Brain test (1987) and to Tiku's test as described by Lawless (1982). The latter was slightly better than any available empirical distribution function tests. In addition, the Mann-Scheuer-Fertig test can deal with censored samples.

J.2 Maximum likelihood estimates of β and η

The equations are those commonly used for singly censored samples. At present, they are the most widespread numerical techniques to obtain Weibull parameters. The form presented in this standard is that of Mann, Schafer and Singpurwalla (1974). Since the numerical procedure of this standard only applies to sample sizes greater than 10, the statistical bias is small.

J.3 Confidence intervals and lower confidence limits

The approach adopted is that of Bain and Engelhardt (1981) for complete samples and Bain and Engelhardt (1986) for censored samples. These references have coefficients generated by Monte Carlo methods, and use asymptotic approximations to adjust the results. Some simple linear and non-linear functions have been fitted to these tables eliminating the need for auxiliary tables. The differences are, in all cases, very minute (~1 %).

An alternative would have been to use Lawless's (1978) conditional methods, but this approach, although theoretically more appealing, would have led to a much more complicated procedure, requiring extensive numerical integration.

The purely asymptotic approach was rejected because the procedure needs to be robust for relatively small samples.

J.4 Accuracy of the standardized procedures

The procedures of this standard have been compared to results published using similar and different techniques. All the examples analysed obtain the same maximum likelihood estimates as the procedure of this standard. The only differences are in the confidence intervals and lower limits. The following is a summary of these comparisons.

J.4.1 Bain and Engelhardt (1986)

Since this is the origin of the standardized procedure, the need to compare the results could be questioned. The interest of the comparison lies in the accuracy of the approximating functions used in this standard. The comparison is as follows:

	Bain & Engelhardt	*Standardized procedure*
90 % confidence interval for β	[1,34 ; 2,73]	[1,34 ; 2,74]
90 % confidence interval for η	[70,7 ; 105,9]	[70 ; 108]
$R_{0,9}(t = 32{,}46)$	0,801	0,800

J.4.2 Lawless (1978)

The sample analysed has 28 failures for a sample size $n = 40$. Lawless only gives 90 % confidence intervals for k and 95 % lower confidence limits for B_{10} and for $R(t = \mathrm{e}^{-1})$. The results are as follows:

	Lawless	*Standardized procedure*
90 % confidence interval for β	[0,783 ; 1,381]	[0,785 ; 1,370]
95 % lower confidence limit for B_{10}	0,066	0,074
$R_{0,95}(t = 0{,}368)$	0,647	0,644

J.4.3 Meeker and Nelson (1976)

This is an asymptotic technique. The example treated is a sample of 96 locomotives, 37 of them having failed. The censoring time T is slightly greater than the time of the last failure. Since the sample size is fairly large, the asymptotic approach should be accurate in this case. The authors only give a 95 % confidence interval for k and, since there is a 95 % confidence interval for B_{10}, we can derive the 97,5 % lower confidence limit for this quantity.

	Meeker & Nelson	*Standardized procedure*
90 % confidence interval for β	[1,72 ; 3,16]	[1,61 ; 3,04]
97,5 % lower confidence limit for B_{10}	55,4	54,2

J.4.4 Guida (1985)

This paper contains Monte Carlo generated tables to obtain exact lower limits for the maximum likelihood estimates of the reliability in small censored samples ($n \leq 20$). Some randomly generated Weibull distributed samples were used to compare the lower limits of the reliability calculated according to this standard and those obtained by Guida. In all cases, the differences were of the order of 1 % or less.

J.5 Reference documents

BAIN, L. J. and ENGELHARDT, M. (1981), *Simple Approximate Distributional Results for Confidence and Tolerance Limits for the Weibull Distribution Based on Maximum Likelihood Estimators*, Technometrics, Vol. 23, No. 1, pp. 15-20.

BAIN, L. J. and ENGELHARDT, M. (1986), *Approximate Distributional Results Based on the Maximum Likelihood Estimators for the Weibull Distribution*, Journal of Quality Technology, Vol. 18, No. 3, pp. 174-181.

BLOM, G. (1958), *Statistical Estimates and Transformed Beta-Variables*, New York, J. Wiley & Sons.

GUIDA, M. (1985), *On the Confidence Limits for Weibull Reliability and Quantiles: The Case of Maximum Likelihood Estimation from Small Size Censored Samples*, Reliability Engineering, Vol. 12, pp. 217-240.

LAWLESS, J. F. (1978), *Confidence Interval Estimation for the Weibull and Extreme Value Distributions*, Technometrics, Vol. 20, No. 4, pp. 355-368.

LAWLESS, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, New York, J. Wiley & Sons.

MANN, N. R., SCHEUER, E. M. and FERTIG, K. W. (1973), *A New Goodness-of-fit test for the Two-parameter Weibull or Extreme Value Distribution*, Commun. Stat., Vol. 2, pp. 383-400.

MANN, N. R., SCHAFER, E. and SINGPURWALLA, N. (1974), *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Lifetime Data*, New York, J. Wiley & Sons.

MEEKER, W. Q. and NELSON, W. (1976), *Weibull Percentile Estimates and Confidence Limits from Singly Censored Data by Maximum Likelihood*, IEEE Trans. on Reliability, Vol. R-25, No. 1, pp. 20-24.

SHAPIRO, S. S. and BRAIN, C. W. (1987), *W-Test for the Weibull Distribution*, Commun. Statist. -Simula., Vol. 16, No. 1, pp. 209-219.

Bibliography

[1] ABERNETHY, R. B., "The New Weibull Handbook", 2003, 4th edition.

[2] Defence Standard 00-40, "Reliability and Maintainability", 2003.

[3] Defence Standard 00-971, "General Specification for Aircraft Gas Turbine Engines", 1987.

[4] IEC 60300-1, Dependability management – Part 1: Dependability management systems

[5] IEC 60300-2, Dependability management – Part 2: Guidelines for dependability management

[6] IEC 60300-3-1:2003, Dependability management – Part 3-1: Application guide – Analysis techniques for dependability – Guide on methodology

[7] IEC 60300-3-2, Dependability management – Part 3-2: Application guide – Collection of dependability data from the field

[8] IEC 60300-3-4:2007, Dependability management – Part 3-4: Application guide – Guide to the specification of dependability requirements

[9] IEC 60605-4:2001, Equipment reliability testing – Part 4: Statistical procedures for exponential distribution – Point estimates, confidence intervals, prediction intervals and tolerance intervals

[10] IEC 60605-6:2007, Equipment reliability testing – Part 6: Tests for the validity and estimation of the constant failure rate and constant failure intensity

[11] ISO 11453:1996, Statistical interpretation of data – Tests and confidence intervals relating to proportions

[12] ISO 2854:1976, Statistical interpretation of data – Techniques of estimation and tests relating to means and variances

[13] JENSEN, F. and PETERSEN, N. E., "Burn-In", John Wiley, 1982.

[14] JOHNSON, L.G., "The Statistical Treatment of Fatigue Experiments", Elsevier, 1974.

[15] JOHNSON, N.L., Kotz, S. and BALAKRISHNAN, N., "Continuous Univariate Distributions Volume 1", 2nd edition, John Wiley, 1994.

[16] LAWLESS, J.F., "Statistical Models and Methods for Lifetime Data", John Wiley & Sons. 1982

[17] MEEKER, W. Q. and ESCOBAR, L. A., "Statistical Methods for Reliability Data", John Wiley, 1998.

[18] MISCHKE, C.R., "A Distribution-independent Plotting Rule for Ordered Failures", ASME Design Engineering Technical Conference, 1979.

[19] MURTHY, Xie & Jiang, " Weibull Models", John Wiley 2004.

[20] NELSON, W., "Applied Life Data Analysis", John Wiley, 1982.

[21] NELSON, W., “Accelerated Testing”, John Wiley, 1990.

[22] O’CONNOR, P. D. T., “Practical Reliability Engineering”, John Wiley, 2002.

[23] IEC 61703, Mathematical expressions for reliability, availability, maintainability and maintenance support terms

[24] ISO/TR 13425:2006, Guidelines for the selection of statistical methods in standardization and specification

SOMMAIRE

COMMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNATIONALE

ANALYSE DE WEIBULL

AVANT-PROPOS

1) La Commission Electrotechnique Internationale (CEI) est une organisation mondiale de normalisation composée de l'ensemble des comités électrotechniques nationaux (Comités nationaux de la CEI). La CEI a pour objet de favoriser la coopération internationale pour toutes les questions de normalisation dans les domaines de l'électricité et de l'électronique. A cet effet, la CEI – entre autres activités – publie des Normes internationales, des Spécifications techniques, des Rapports techniques, des Spécifications accessibles au public (PAS) et des Guides (ci-après dénommés "Publication(s) de la CEI"). Leur élaboration est confiée à des comités d'études, aux travaux desquels tout Comité national intéressé par le sujet traité peut participer. Les organisations internationales, gouvernementales et non gouvernementales, en liaison avec la CEI, participent également aux travaux. La CEI collabore étroitement avec l'Organisation Internationale de Normalisation (ISO), selon des conditions fixées par accord entre les deux organisations.
2) Les décisions ou accords officiels de la CEI concernant les questions techniques représentent, dans la mesure du possible, un accord international sur les sujets étudiés, étant donné que les Comités nationaux de la CEI intéressés sont représentés dans chaque comité d'études.
3) Les Publications de la CEI se présentent sous la forme de recommandations internationales et sont agréées comme telles par les Comités nationaux de la CEI. Tous les efforts raisonnables sont entrepris afin que la CEI s'assure de l'exactitude du contenu technique de ses publications; la CEI ne peut pas être tenue responsable de l'éventuelle mauvaise utilisation ou interprétation qui en est faite par un quelconque utilisateur final.
4) Dans le but d'encourager l'uniformité internationale, les Comités nationaux de la CEI s'engagent, dans toute la mesure possible, à appliquer de façon transparente les Publications de la CEI dans leurs publications nationales et régionales. Toutes divergences entre toutes Publications de la CEI et toutes publications nationales ou régionales correspondantes doivent être indiquées en termes clairs dans ces dernières.
5) La CEI n'a prévu aucune procédure de marquage valant indication d'approbation et n'engage pas sa responsabilité pour les équipements déclarés conformes à une de ses Publications.
6) Tous les utilisateurs doivent s'assurer qu'ils sont en possession de la dernière édition de cette publication.
7) Aucune responsabilité ne doit être imputée à la CEI, à ses administrateurs, employés, auxiliaires ou mandataires, y compris ses experts particuliers et les membres de ses comités d'études et des Comités nationaux de la CEI, pour tout préjudice causé en cas de dommages corporels et matériels, ou de tout autre dommage de quelque nature que ce soit, directe ou indirecte, ou pour supporter les coûts (y compris les frais de justice) et les dépenses découlant de la publication ou de l'utilisation de cette Publication de la CEI ou de toute autre Publication de la CEI, ou au crédit qui lui est accordé.
8) L'attention est attirée sur les références normatives citées dans cette publication. L'utilisation de publications référencées est obligatoire pour une application correcte de la présente publication.
9) L'attention est attirée sur le fait que certains des éléments de la présente Publication de la CEI peuvent faire l'objet de droits de propriété intellectuelle ou de droits analogues. La CEI ne saurait être tenue pour responsable de ne pas avoir identifié de tels droits de propriété et de ne pas avoir signalé leur existence.

La Norme internationale CEI 61649 a été préparée par le Comité d'études 56 de la CEI: Sûreté de fonctionnement.

Cette seconde édition annule et remplace la première édition parue en 1997 et constitue une révision technique.

Cette édition inclut les modifications techniques majeures suivantes par rapport à l'édition précédente:

– le titre a été raccourci et se lit maintenant comme «Analyse de Weibull»
– des méthodes pour des solutions à la fois analytiques et graphiques ont été ajoutées.

Le texte de la présente norme est issu des documents suivants:

FDIS	Rapport de vote
56/1269/FDIS	56/1281/RVD

Le rapport de vote indiqué dans le tableau ci-dessus donne toute information sur le vote ayant abouti à l'approbation de cette norme.

Cette publication a été rédigée selon les Directives ISO/CEI, Partie 2.

Le comité a décidé que le contenu de cette publication ne sera pas modifié avant la date de maintenance indiquée sur le site web de la CEI sous "http://webstore.iec.ch" dans les données relatives à la publication recherchée. A cette date, la publication sera

- reconduite,
- supprimée,
- remplacée par une édition révisée, ou
- amendée.

INTRODUCTION

La distribution Weibull est utilisée pour modéliser des données indépendamment du fait que le taux de défaillance est croissant, décroissant ou constant. La distribution de Weibull est souple et adaptable à une large variété de données. Le temps avant défaillance, le nombre de cycles avant défaillance, le parcours avant défaillance, les contraintes mécaniques ou des paramètres continus similaires doivent être enregistrés pour toutes les entités. Une distribution de la durée de vie peut être modélisée même si toutes les entités n’ont pas été défaillantes.

Des recommandations sont données sur la façon de réaliser une analyse en utilisant un programme informatique du type tableur. Des recommandations sont également données sur la façon d’analyser différents modes de défaillance séparément et d’identifier une éventuelle population fragile. L’utilisation de la distribution de Weibull à trois paramètres peut fournir des informations sur le temps avant la première défaillance ou l'endurance minimale dans l'échantillon.

ANALYSE DE WEIBULL

1 Domaine d'application

La présente Norme internationale fournit des méthodes pour analyser les données d'une distribution de Weibull en utilisant les paramètres continus tels que temps avant défaillance, nombre de cycles avant défaillance, contraintes mécaniques, etc.

La présente norme est applicable dès que des données sur des paramètres cruciaux tels que temps avant défaillance, contraintes, etc. sont disponibles pour un échantillon aléatoire d'entités fonctionnant dans des conditions d'essais ou en service, afin d'estimer des mesures de performance de fiabilité de la population dont ces entités sont issues.

La présente norme est applicable lorsque les données analysées sont distribuées de façon indépendante et identique. Il convient que ceci soit testé ou présumé vrai (voir CEI 60300-3-5).

Dans la présente norme, des méthodes numériques et des méthodes graphiques sont décrites pour tracer les données, faire un test d'adéquation, et estimer les paramètres d'une distribution de Weibull à deux ou trois paramètres et tracer les limites de confiance. Des recommandations sont données sur l'interprétation du tracé en terme de risque en fonction du temps, des modes de défaillance et des populations fragiles possibles, et de temps avant la première défaillance ou d'endurance minimale.

2 Références normatives

Les documents référencés suivants sont indispensables pour l'application de ce document. Pour des références datées, seule l'édition citée s'applique. Pour les références non datées, c'est la dernière édition du document référencé (y compris les amendements) qui s'applique.

CEI 60050-191:1990, *Vocabulaire Electrotechnique –Partie 191: Sûreté de fonctionnement et qualite de service*

CEI 60300-3-5:2001, *Gestion de la sûreté de fonctionnement – Partie 3-5: Guide d'application – Conditions des essais de fiabilité et principes des essais statistiquesCEI 61810-2, Relais électromécaniques élémentaires – Partie 2: Fiabilité*

ISO 2854:1976, *Interprétation statistique des données – Techniques d'estimation et tests pourtant sur des moyennes et des variances*

ISO 3534-1:2006, *Statistique – Vocabulaire et symboles – Partie 1: Termes statistiques généraux et termes utilisés en calcul des probabilités*

3 Termes, définitions, abréviations et symboles

Pour les besoins du présent document, les définitions, abréviations et symboles de la CEI 60050-191 et de l'ISO 3534-1 s'appliquent, avec les définitions suivantes.

3.1 Termes et définitions

3.1.1
censure
fin de l'essai après soit un temps donné, soit un nombre de défaillances donné

NOTE Un essai terminé alors que des entités ne sont toujours pas défaillantes peut être appelé «essai censuré», et les données à la fin d'un tel essai peuvent être appelées «données censurées».

3.1.2
temps suspendu
entité pour laquelle l'essai a été abrégé sans qu'il y ait eu une défaillance significative

NOTE 1 L'entité peut être sans défaillance ou être défaillante selon un mode autre que celui qui est le sujet de l'investigation.

NOTE 2 Une «suspension précoce» est une suspension qui a été faite avant la première défaillance. Une «suspension tardive» est une suspension intervenant après la dernière défaillance.

3.1.3
essai de durée de vie
essai ayant pour but l'estimation, la vérification de la durée de vie d'un produit

NOTE La fin de vie utile sera souvent définie comme le moment où un certain pourcentage d'entités sont défaillantes pour des entités non réparées et, comme le moment où l'intensité de défaillance a augmenté jusqu'à un niveau spécifié pour les entités réparées.

3.1.4
entité non réparée
entité qui, sous des conditions données et après défaillance, ne peut être remise dans un état où elle peut fonctionner comme exigé

NOTE Les conditions données peuvent être techniques, économiques, écologiques, et/ou autres.

3.1.5
temps de fonctionnement
intervalle de temps pendant lequel une entité est en état de fonctionnement

NOTE L'expression « temps de fonctionnement » est générique et il convient de l'exprimer en unité appropriée à l'entité considérée, par exemple, durée calendaire, cycles de fonctionnement, distance parcourue, etc. il convient que l'unité soit toujours clairement établie.

3.1.6
défaillance pertinente
défaillance à prendre en compte dans l'interprétation des résultats d'essai ou d'exploitation ou dans le calcul de la valeur d'une mesure de performance de fiabilité

NOTE Il convient d'indiquer les critères de prise en compte.

3.1.17
essai de fiabilité
expérience réalisée afin de mesurer, quantifier ou classer une mesure de fiabilité ou une propriété d'une entité

NOTE 1 Les essais de fiabilité sont différents des essais d'environnement pour lesquels le but est de prouver que les entités à l'essai peuvent survivre dans des conditions extrêmes de stockage, transport et utilisation.

NOTE 2 Les essais de fiabilité peuvent inclure des essais d'environnement.

3.1.8
entité réparée
entité qui, sous des conditions données et après défaillance, peut être remise dans un état où elle peut fonctionner comme exigé

NOTE Les conditions données peuvent être techniques, économiques, écologiques, et/ou autres.

3.1.9
temps de fonctionnement avant défaillance
cumul des temps de fonctionnement d'une entité depuis la première utilisation ou depuis une réparation, jusqu'à l'apparition d'une défaillance

NOTE Dans les applications pour lesquelles le temps en stockage ou en arrêt est significativement supérieur au temps de fonctionnement, le temps avant défaillance peut être basé sur le temps en service spécifié.

3.1.10
temps entre défaillances
temps entre deux défaillances consécutives

NOTE 1 Le temps entre défaillances comprend le temps de montée et le temps de descente.

NOTE 2 Dans les applications pour lesquelles le temps en stockage ou en arrêt est significativement supérieur au temps de fonctionnement, le temps avant défaillance peut être basé sur le temps en service spécifié.

3.1.11
durée de vie B
pourcentage L
âge auquel un pourcentage donné d'entités est défaillant

NOTE La durée de vie «B_{10}» est l'âge auquel 10 % d'entités (par exemple des paliers) sont défaillantes. Parfois, elle est appelée valeur de la durée de vie L. Les durées de vie B peuvent être lues directement à partir du tracé de Weibull ou déterminées plus précisément à partir de l'équation de Weibull. La durée de vie B_{50} est l'âge auquel 50 % des entités sont défaillantes, soit le temps médian avant défaillance.

3.2 Abréviations

ASIC	application specific integrated circuit (circuit intégré d'application spécifique)
BGA	ball grid array (réseau à connexions par refusion de boules)
CDF	cumulative distribution function (fonction de distribution cumulée)
PDF	probability density function (fonction de densité de probabilité)
MLE	maximum likelihood estimation (estimation du maximum de vraisemblance)
MRR	median rank regression (méthode de régression du rang médian)
MTTF	mean time to failure (temps moyen de fonctionnement avant défaillance)

3.3 Symboles

t	variable - temps
η	paramètre d'échelle ou durée de vie caractéristique de Weibull
β	paramètre de forme de Weibull
t_0	point de départ ou origine de la distribution, temps sans défaillance
r^2	coefficient de détermination
$f(t)$	fonction de densité de probabilité
$F(t)$	fonction de distribution cumulée
$h(t)$	fonction de risque
$\lambda(t)$	taux de défaillance instantané
$H(t)$	fonction de risque cumulée
F_1	nombre de défaillances avec le mode de défaillance 1
F_2	nombre de défaillances avec le mode de défaillance 2
F_3	nombre de défaillances avec le mode de défaillance 3

4 Application des techniques

Le Tableau 1 montre les circonstances dans lesquelles les aspects particuliers de cette norme sont applicables. Il montre les trois méthodes principales pour l'estimation des paramètres de la distribution de Weibull, appelées respectivement méthode graphique, méthode de calcul et de Weibayes, et indique le type de données pour chacune des trois méthodes.

Tableau 1 – Guide pour l'utilisation de la CEI 61649

Méthode/ Type de donnée	Méthodes graphiques	Méthodes de calcul	Weibayes
Intervalle censuré	√	NC	√
Censure multiple	√	NC	√
Censure simple	√	√	√
Défaillances zéro	NC	NC	√
Petit échantillon (≤20)	√	NC	√
Grand échantillon	√	√	NC
Données sous forme de courbes	√	NC	NC
Données complètes	√	√	√
NOTE NC signifie non couvert par cette norme.			

5 La distribution de Weibull

5.1 La distribution de Weibull à deux paramètres

La distribution de Weibull à deux paramètres est de loin la distribution la plus utilisée pour l'analyse des données de durée de vie. La fonction de densité de la probabilité de Weibull (PDF) est montrée dans l'Équation (1):

$$\mathrm{f}(t) = \beta \cdot \frac{t^{\beta - 1}}{\eta^{\beta}} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{1}$$

où

t est la variable - temps

η est la durée de vie caractéristique ou paramètre d'échelle, et

β est le paramètre de forme.

La fonction de distribution cumulative de Weibull (CDF) possède une équation explicite comme montré par l'Équation (2):

$$\mathrm{F}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-(t/\eta)^{\beta}} \tag{2}$$

Les deux paramètres sont η, la durée de vie caractéristique et β, le paramètre de forme. Le paramètre de forme indique la variation du taux de défaillance instantané en fonction du temps, c'est-à-dire la nature des défaillances: défaillances précoces, aléatoires ou d'usure. Il détermine quel membre de la famille des distributions Weibull est le plus approprié. Les différents membres ont des fonctions de densité de probabilité de forme très différente (PDFs) (voir Figure 1). La distribution de Weibull correspond à une large étendue de donnée de vie comparée aux autres distributions. La variable temps *t* est générique et peut avoir diverses mesures telles que, temps, distance, nombre de cycles ou contraintes mécaniques.

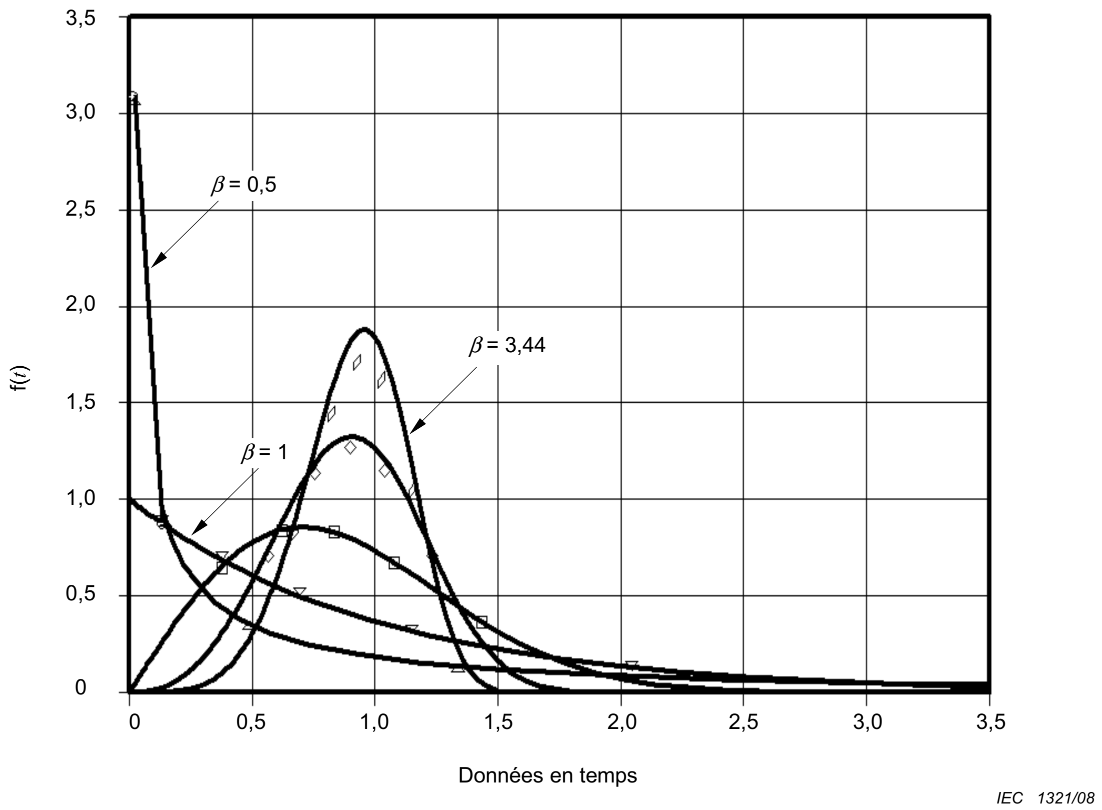


Figure 1 – Les formes PDF de la famille de Weibull pour η = 1,0

D'après la Figure 1, la forme PDF pour β = 3,44 (indiqué) semble être la distribution normale: c'est une bonne approximation, sauf pour les extrémités de la distribution.

Le taux de défaillance instantané λ(t) (ou h(t), la fonction de risque) de la distribution à deux paramètres est donné par l'Équation (3):

$$\lambda(t) = \mathrm{h}(t) = \beta \cdot \frac{t^{\beta-1}}{\eta^{\beta}} \quad (3)$$

Les trois valeurs principales du paramètre de forme, β, sont:

- pour β = 1,0 la distribution de Weibull est identique à la distribution exponentielle et le taux de défaillance instantané, λ(t), devient alors une constante égale à l'inverse du paramètre d'échelle, η ;

- β > 1,0 est le cas du taux de défaillance instantané en augmentation;
- β < 1,0 est le cas du taux de défaillance instantané en diminution.

La durée de vie caractéristique, η , est le temps auquel 63,2 % des entités sont supposées avoir subi une défaillance. Ceci est vrai pour toutes les distributions de Weibull, quelle que soit la forme du paramètre, β. S'il y a remplacement des entités, alors 63,2 % des temps avant défaillance sont supposés être inférieurs ou égaux à la durée de vie caractéristique, η. D'autres aspects sur les entités réparées et non réparées se trouvent dans la CEI 60300-3-5. Les 63,2 % sont issus de l'hypothèse $t = \eta$ donne l'Équation suivante (4):

$$F(\eta) = 1 - e^{-(\eta/\eta)^{\beta}} = 1 - e^{-(1)^{\beta}} = 1 - (1/e) = 0{,}632 \tag{4}$$

5.2 La distribution de Weibull à trois paramètres

L'Équation (5) ci-dessous montre la fonction de distribution cumulative (CDF) de la distribution de Weibull à trois paramètres.

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{5}$$

Le paramètre t_0 est appelé le temps sans défaillance, paramètre de lieu ou de durée de vie minimale.

L'effet du paramètre de positionnement n'est généralement pas bien compris tant qu'une faible adéquation est observée avec le tracé de Weibull à deux paramètres. Lorsqu'un manque d'adéquation est observé, les ingénieurs tentent d'utiliser d'autres distributions qui peuvent leur apporter une meilleure adéquation. Cependant, le manque d'adéquation peut être accepté quand les données sont tracées sur une distribution de Weibull à 3 paramètres (voir 8.5). En utilisant le paramètre de positionnement, il devient évident que les défaillances sont décalées d'une durée fixe, appelée seuil. L'effet du paramètre de positionnement est normalement observé quand un produit subit une vie sur étagère avant que la première défaillance se produise. Un bon indicateur de l'effet du paramètre de positionnement est la forme convexe d'un tracé.

6 Considérations sur les données

6.1 Types de données

Les données de durée de vie sont liées aux entités qui «vieillissent» jusqu'à défaillance. Les données de défaillance de Weibull sont généralement des données de durée de vie mais elles décrivent aussi des données de matériel où le «vieillissement» peut être représenté par une contrainte, une force ou la température. "L'âge" peut être le temps de fonctionnement, les démarrages et arrêts, les atterrissages, décollages, les cycles lents de fatigue, le kilométrage, le temps sur étagère ou en stockage, les cycles ou durées sous forte contrainte ou haute température, ou de nombreux autres paramètres continus. Dans la présente norme, le paramètre «âge» sera désigné par le temps. Si nécessaire, le «temps» peut être remplacé par tout autre paramètre d'«âge» listé ci-dessus.

6.2 Temps avant défaillance

La variable «temps» de Weibull est généralement considérée comme une mesure de la partie consommée de la durée de vie. Les interprétations suivantes peuvent être utilisées:

– temps avant la première défaillance d'une entité réparée;
– temps avant défaillance d'une entité non réparée;
– temps entre le début (état neuf) et chaque défaillance d'un système réparable si une entité non réparable du système est défaillante plus d'une fois pendant la période

d'observation. L'hypothèse est faite que la réparation (changement d'une entité) n'introduit pas une nouvelle défaillance, hypothèse permettant de considérer avec une approximation le système réparé comme ayant la même fiabilité qu'immédiatement avant la défaillance ;

– temps avant la première défaillance d'une entité non réparée après une maintenance programmée, avec l'hypothèse que la défaillance est liée à la précédente maintenance.

6.3 Caractéristiques des matériaux et la distribution de Weibull

Les caractéristiques des matériaux telles que fluage, rupture sous contrainte ou cassure, et fatigue sont souvent tracées sur du papier de probabilité de Weibull. Ici l'échelle horizontale peut être des contraintes, des cycles, charges, nombre de répétitions de charge ou la température.

6.4 Taille d'échantillon

L'incertitude en ce qui concerne l'estimation des paramètres de Weibull est liée à la taille de l'échantillon qui est le nombre de défaillances pertinentes. Il suffit de deux défaillances pour estimer les paramètres de Weibull; cependant, l'incertitude d'une telle estimation serait excessive et ne pourrait confirmer l'applicabilité du modèle de Weibull. Quelle que soit la taille de l'échantillon, il convient de calculer les limites de confiance de façon à évaluer l'incertitude des estimations.

Comme pour toute analyse statistique, plus il y a de données disponibles, mieux ça vaut, mais, si l'ensemble de données est limité, alors se référer au conseil donné en 11.3.

6.5 Données censurées et données suspendues

Lorsqu'on analyse les données de durée de vie, il est nécessaire d'inclure les données sur les entités dans l'échantillon qui n'ont pas eu de défaillance ou dont la défaillance ne relève pas du mode de défaillance analysé. Ce type de données est référencé comme données censurées ou suspendues (voir CEI 60300-3-5). Lorsque le temps avant défaillance de toutes les entités est observé, les données sont dites complètes.

Une entité à l'essai qui n'est pas défaillante par le mode de défaillance étudié est une entité suspendue ou censurée. Elle peut être défaillante par un mode de défaillance différent ou pas du tout défaillante. Une «suspension précoce» est une suspension faite avant la première défaillance. Une «suspension tardive» est faite après la dernière défaillance. Les suspensions entre défaillances sont appelées aléatoires ou progressives.

Si des entités restent non défaillantes, alors les données correspondantes sont dites censurées. Si un essai est terminé à un temps spécifié, T, avant que toutes les entités ne deviennent défaillantes, alors les données sont dites censurées dans le temps. Si un essai est terminé après qu'un nombre de défaillances spécifié est survenu, alors les données sont dites censurées par les défaillances.

D'autres cas de censure sont couverts par la CEI 60300-3-5.

7 Méthodes graphiques et test d'adéquation

7.1 Vue d'ensemble

L'analyse graphique consiste à porter les données sur un papier de probabilité de Weibull, déterminer une courbe à partir de ces données, interpréter le tracé et estimer les paramètres en utilisant un papier de probabilité spécial transformant l'équation de Weibull sous forme linéaire. Ceci est illustré en Annexe I.

Les données sont tracées après les avoir organisées de la plus précoce à la plus tardive, par un processus appelé classement. Les données de temps avant défaillance sont portées sur l'axe X du papier de probabilité Weibull.

L'axe Y est le rang médian comme spécifié en 7.2.1. Pour les échantillons de taille supérieure à 30, le rang médian est en pratique le même que le pourcentage de défaillances. Si les données tracées suivent une tendance linéaire, une droite de régression peut être tracée.

Les paramètres peuvent alors être lus en dehors du tracé. La durée de vie caractéristique, η, est le temps pour lequel 63,2 % des entités sont défaillantes, soit la «durée de vie B63,2». Le paramètre de forme, β , est estimé comme étant la pente sur le papier Weibull.

La méthode de régression du rang médian (MRR) est une méthode d'estimation des paramètres de la distribution utilisant des techniques de régression linéaire avec pour variables le rang médian et la durée de vie ou les contraintes, etc.

Une autre méthode graphique utilisée pour l'estimation des paramètres d'une distribution de Weibull est appelée tracé de risque cumulatif et décrite en 7.3.

7.2 Comment réaliser le tracé de probabilité

Pour réaliser un tracé de probabilité, il faut suivre certaines étapes. Ces étapes sont décrites en détail ci-dessous.

7.2.1 Classement

Pour réaliser le tracé de Weibull, il faut classer les données du plus bas au plus élevé des temps avant défaillance. Ce classement établira les positions de traçage pour le temps, t, en abscisse et $F(t)$, en ordonnée, exprimée en pourcentages. Ceci donnera des informations pour la construction de la courbe de Weibull montrée dans l'Équation (6).

Les tableaux du rang médian sont donnés en Annexe C. Par exemple, entrer dans les tableaux de l'Annexe C pour 50 % de rang médian, pour une taille d'échantillon de cinq, et trouver les rangs médians dans le Tableau 2 pour les cinq temps de défaillance de la colonne centrale. Les positions de traçage des rangs médians données dans l'Annexe C sont utilisées avec tout type de papier de probabilité, c'est-à-dire Weibull, log-normal, normal et valeur extrême.

NOTE 1 Si deux points de données ont le même temps, ils seront placés à des valeurs de rangs médians différentes.

Tableau 2 – Données classées de défaillance de rivets

Numéro d'ordre I	Temps avant défaillance t min (X)	Rang médian (%) (Y)
1	30	12,94
2	49	31,38
3	82	50,00
4	90	68,62
5	96	87,06

L'estimation médiane est préférée à la valeur moyenne pour les distributions non-symétriques. La plupart des distributions de données de durée de vie sont biaisées, la médiane joue, par conséquent, un rôle important.

Si un tableau de rangs médians et un moyen de calculer les rangs médians en utilisant la distribution Beta ne sont pas disponibles, l'approximation de Benard, Équation (6), peut être utilisée:

$$F_i = \frac{(i-0,3)}{(N+0,4)}\% \qquad (6)$$

où N est la taille d'échantillon et i est la position classée de la donnée en question.

NOTE 2 Cette équation est le plus souvent utilisée pour $N \leq 30$; pour $N > 30$ la correction de la fréquence cumulative peut être négligée. $F_i = (i/N) \times 100$ %.

7.2.2 Le tracé de la probabilité de Weibull

Après avoir transformé les données, le tracé peut être construit selon trois méthodes différentes:

- un papier de probabilité de Weibull – L'Annexe F montre le papier de probabilité de Weibull;
- un programme de tableur sur ordinateur – L'Annexe E donne un exemple de tableur;
- un logiciel commercial.

7.2.3 Travailler avec des données suspendues ou censurées

Les entités non défaillantes ou entités défaillantes par un mode de défaillance différent sont respectivement des entités «censurées» ou «suspendues». Ces données ne peuvent être ignorées. Les temps sur les entités suspendues doivent être inclus dans l'analyse.

La formule ci-dessous donne les rangs ajustés sans qu'il soit nécessaire de calculer les écarts entre les rangs. Elle est utilisée pour chaque défaillance et nécessite une colonne supplémentaire pour les classements inversés. La procédure est de classer les données avec suspensions et d'utiliser l'Équation (7) pour déterminer les rangs, ajustés pour la présence des suspensions.

$$\text{Rang ajusté} = \frac{(\text{Classement inversé})\ \text{x}\ (\text{Rang ajusté précédent}) + (N+1)}{(\text{Classement inversé}) + 1} \qquad (7)$$

Les numéros de classement sont ajustés pour l'effet des trois entités suspendues dans le Tableau 3.

Tableau 3 – Rangs ajustés pour données suspendues ou censurées

Rang	Durée	Statut	Classement inversé	Rang ajusté	Rang médian %
1	10	Suspension	8	Suspendu…	
2	30	Défaillance	7	[7 × 0 +(8+1)]/ (7+1) = 1,125	9,8
3	45	Suspension	6	Suspendu…	
4	49	Défaillance	5	[5 × 1,125 +(8+1)]/ (5+1) = 2,438	25,5
5	82	Défaillance	4	[4 × 2,438 +(8+1)]/ (4+1) = 3,750	41,1
6	90	Défaillance	3	[3 × 3,750 +(8+1)]/ (3+1) = 5,063	56,7
7	96	Défaillance	2	[2 × 5,063 +(8+1)]/ (2+1) = 6,375	72,3
8	100	Suspension	1	Suspendu…	

Dans cet exemple, les rangs ajustés utilisent l'approximation de Benard pour calculer le rang médian, ce qui est plus facile que d'interpoler dans le tableau. Les résultats du Tableau 3 sont tracés en Figure 2.

NOTE Si deux entités sont défaillantes au même âge, on leur assigne des numéros d'ordre de classement séquentiel. En cas de suspension tardive, la procédure est à répéter pour le reste des défaillances.

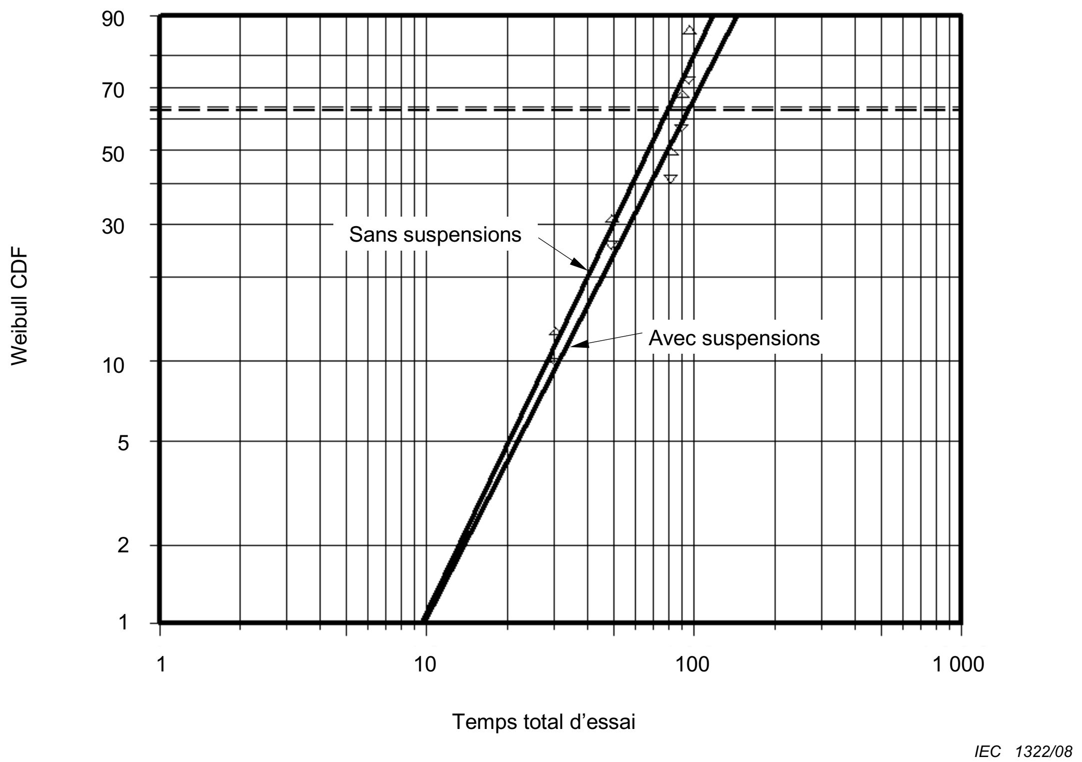


Figure 2 – Temps total d'essai (minutes)

L'approximation de Benard pour le rang médian est suffisamment précise lorsqu'on utilise la suspension pour le traçage des distributions de Weibull et l'estimation des paramètres. Dans ce cas, «i» est le rang ajusté et «N» est la somme des défaillances et suspensions. Les rangs médians sont convertis en pourcentage pour traçage sur du papier de Weibull. Par exemple, pour la première défaillance dans le Tableau 3 avec un rang ajusté de 1,125:

$$Median\,Rank\,(\%) = \frac{(1{,}125 - 0{,}3)}{(8 + 0{,}4)} \times 100 = 9{,}82\% \tag{8}$$

La Figure 2 montre le tracé correct de Weibull tel qu'il inclut les suspensions.

Ci-après les étapes pour tracer les ensembles de données avec les suspensions:

a) classer les temps, défaillances et suspensions, du plus précoce au plus tardif;
b) calculer les rangs ajustés pour les défaillances (les suspensions ne sont pas tracées);
c) utiliser l'approximation de Benard pour calculer les rangs médians;
d) tracer les temps de défaillance (x) par rapport aux rangs médians (y) sur du papier de Weibull;
e) estimer η en lisant la durée de vie B63,2 du tracé;
f) estimer β avec une règle ou utiliser des échelles beta spéciales généralement données sur le papier de probabilité de Weibull;
g) interpréter le tracé.

7.2.4 Traçage de probabilité

Le traçage des données sur papier Weibull à la main ou avec un ordinateur peut être suffisant pour vérifier l'adéquation. Se représenter visuellement, de façon subjective, une ligne droite peut donner une indication d'adéquation.

7.2.5 Vérification de l'adéquation

Si les données se regroupent autour d'une ligne droite sur le tracé de probabilité, cela prouve que les données viennent de la distribution étudiée. Cependant, les petits échantillons rendent difficile la mesure de l'adéquation. Il existe des mesures statistiques d'adéquation telles que les tests de Khi-deux, Kolmogorov-Smirnoff et Nancy Mann. Cette norme utilise la corrélation du coefficient au carré appelée coefficient de détermination.

Ceci peut se calculer en utilisant l'Équation (9):

$$r^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N(\bar{x})^2 \right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - N(\bar{y})^2 \right)} \tag{9}$$

où x_i et y_i sont le rang médian et le temps de défaillance, respectivement, $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les moyennes de x_i et y_i et N est la taille de l'échantillon.

r^2 est la proportion de variation dans les données qui peut s'expliquer par l'hypothèse de Weibull. Plus le résultat est proche de 1, plus les données correspondent à une distribution de Weibull, plus il est proche de 0, plus l'adéquation est faible. Le coefficient de corrélation, «r», est destiné à mesurer l'intensité d'une relation linéaire entre deux variables. «r» est le nombre entre -1 et +1, selon la pente. Autrement, si le tracé de Weibull est construit en utilisant un tableur alors, en utilisant des techniques de régression linéaire, le coefficient de corrélation est souvent donné comme une partie des sorties, lorsque les données correspondent à une ligne droite (généralement une option sélective). De façon similaire, des progiciels du commerce fournissent le coefficient de détermination.

Il convient d'utiliser ceci avec précaution et uniquement si une inspection visuelle confirme l'observation.

7.3 Tracé de risque

Les techniques de tracé de probabilité de Weibull estiment tout d'abord la proportion cumulée de défaillances, F*(t)* utilisant des rangs médians, et tracent ensuite les temps avant défaillance par rapport aux probabilités cumulatives respectives estimées sur le papier de probabilité de Weibull.

La technique de tracé du risque commence avec l'estimation du taux de défaillance instantané ou la fonction de risque,

$$\lambda(t) = h(t) = \frac{f(t)}{[1 - F(t)]} \ , \qquad (10)$$

utilisant une estimation de la fonction de risque cumulative.

La fonction de risque cumulative,

$$H(t) = \int_0^t h(t)dt = -\ln\left[1 - F(t)\right] \ , \qquad (11)$$

est estimée par la somme cumulative des fonctions de risque estimées.

Pour la distribution de Weibull,

$$H(t) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \ , \qquad (12)$$

l'application des logarithmes des deux côtés donne la relation linéaire suivante:

$$\ln(H(t)) = \beta \ln(t) - \beta \ln(\eta) \qquad (13)$$

Le papier de risque de Weibull est un papier log-log. La pente nominale de la courbe est β, et $t = \eta$ quand $H(t) = 1$.

NOTE On peut utiliser soit les logarithmes naturels ou des logarithmes à base 10 pour le papier de risque Weibull.

Même si le papier de risque de Weibull est disponible pour certains pays, cette technique peut être utilisée avec le papier de probabilité de Weibull usuel en appliquant la transformation:

$$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-H(t)} \qquad (14)$$

Ceci peut facilement être mis en œuvre à l'aide d'un programme de tableur.

La procédure de tracé du risque est la suivante:

a) classer les temps, défaillances et suspensions simultanément, du plus précoce au plus tardif;

b) pour chaque défaillance, calculer le taux de défaillance instantané, donné par 1/(nombre d'entités restant après la précédente défaillance ou censure);

c) pour chaque défaillance, calculer la somme cumulée des taux de défaillance instantanés, comme une estimation de la fonction de risque;

d) tracer les risques cumulés estimés par rapport au temps de défaillance sur le papier log-log;

e) faire correspondre une ligne droite aux tracés;

f) estimer les paramètres.

L'Annexe E donne des exemples. La CEI 61810-2 fournit également des exemples d'utilisation de traçage de risque pour estimer les paramètres de la distribution de Weibull.

8 Interprétation du tracé de probabilité de Weibull

8.1 La courbe en baignoire

8.1.1 Généralités

La courbe baignoire bien connue (voir Figure 3) montre la relation entre le paramètre de forme Weibull, β, et la fonction de risque à travers la durée de vie d'une entité. Cependant, toutes les entités n'affichent pas tous les éléments de la courbe baignoire pendant leur durée de vie.

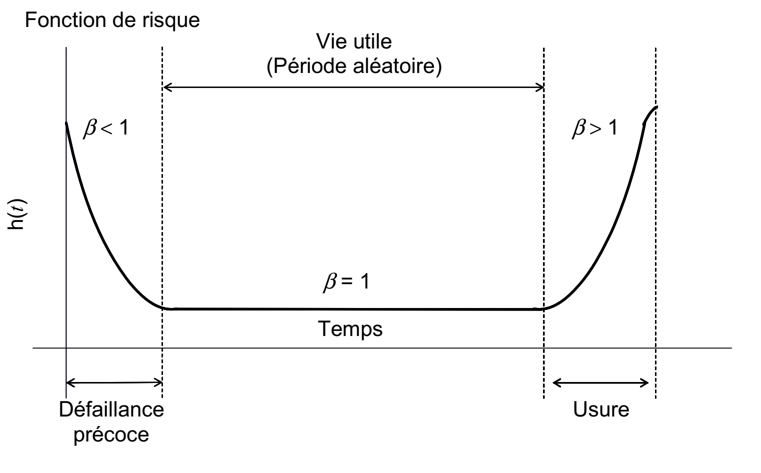


Figure 3 – Courbe en baignoire typique pour une entité

8.1.2 β <1 – Implique des défaillances précoces

Les systèmes électroniques et mécaniques peuvent avoir initialement des taux de défaillances élevés. Les fabricants mènent des contrôles des processus de production, des essais d'acceptation de production, «rodage», ou déverminage sous contrainte environnementale, pour éviter les défaillances précoces avant livraison au client. Par conséquent, les paramètres de forme inférieurs à 1 indiquent ce qui suit:

– manque de processus de contrôle adéquat;
– rôdage ou déverminage sous contrainte inadéquat;
– problèmes de production, mauvais assemblage, contrôle de faible qualité;

– problèmes de révision;
– mélange de populations;
– rodage.

De nombreux composants électroniques montrent, au cours de leur durée de vie utile, une diminution du taux de défaillance instantané, c'est-à-dire un paramètre de forme inférieur à 1. La maintenance préventive de tel composant n'est pas appropriée, les composants anciens étant meilleurs qu'à l'état neuf.

8.1.3 β = 1 – Implique un taux de défaillance instantané constant

Ceci est souvent appelé période de défaillance aléatoire, les défaillances survenant de façon aléatoire dans le temps. Ces modes de défaillances sont considérés indépendants du temps. Dans ce cas, une maintenance préventive n'améliorerait pas le système.

Par conséquent, chacun des éléments suivants doit être suspecté:

– erreurs de maintenance aléatoires, erreurs humaines;
– surcharge aléatoire;
– défaillances dues à la nature de l'entité, dommage résultant d'objets étrangers à l'entité, coups de foudre;
– mélanges de données de trois modes de défaillance ou plus (supposant qu'ils ont différentes valeurs de β) où aucun mécanisme de défaillance n'est prédominant.

Là encore, la maintenance préventive n'est pas appropriée. La distribution de Weibull avec β = 1 est identique à la distribution exponentielle. Parmi ceux qui survivent au temps, t, un pourcentage constant est défaillant dans la prochaine période de temps. Ceci est connu comme un taux de défaillance instantané constant.

8.1.4 β >1 – Implique l'usure

Certains exemples typiques de ce cas sont les suivants:

– usure;
– corrosion;
– propagation de fêlure;
– fatigue;
– absorption d'humidité;
– diffusion;
– évaporation (perte de poids);
– accumulation de dommages.

Des mesures de conception doivent assurer que ces phénomènes ne contribuent pas, significativement, à la probabilité de la défaillance du produit, pendant la durée de vie opérationnelle attendue.

La distribution de Weibull à trois paramètres estime le temps minimum avant la première défaillance, ce qui est très avantageux dans les cas où le paramètre de forme est supérieur à 1 (voir 5.2 et 8.5).

8.2 Des modes de Weibull inconnus peuvent être «masqués»

On peut rencontrer des phénomènes «masqués» lorsqu'il y a plus de deux modes de défaillance en concurrence, avec des valeurs élevées de paramètres de forme et des paramètres d'échelle très différents. Ceci signifie que, pour un échantillon de petite taille, il convient que la plupart ou la totalité des échantillons soient défaillants dans le mode de défaillance ayant le paramètre d'échelle plus bas. Les autres modes de défaillance peuvent ne pas être identifiés tant que le premier mode de défaillance n'est pas éliminé. Un exemple de deux modes de défaillance en concurrence est montré Figure 4.

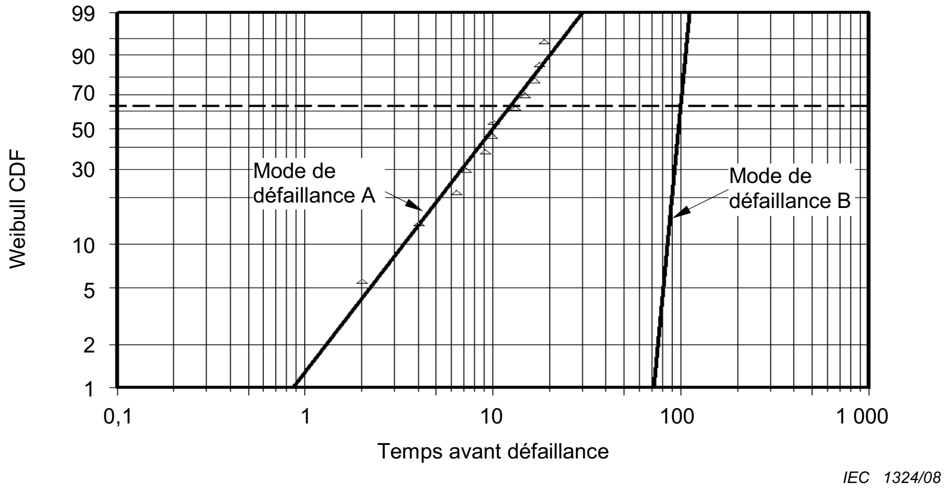


Figure 4 – Des modes de défaillance de Weibull peuvent être «masqués»

8.3 Echantillons de petite taille

L'analyse de Weibull est possible à partir de petits échantillons. Cependant, les limites de confiance sont affectées par la taille de l'échantillon. Les petits échantillons augmentent l'incertitude dans l'estimation des paramètres de durée de vie.

L'amélioration de l'incertitude avec l'augmentation de la taille de l'échantillon est illustrée dans les Figures 5 et 6. (Les «bornes de durée de vie B 90%» (limites de confiance) contiennent la «durée de vie B» inconnue avec une fréquence à 90%. L'intervalle est beaucoup plus petit Figure 6.)

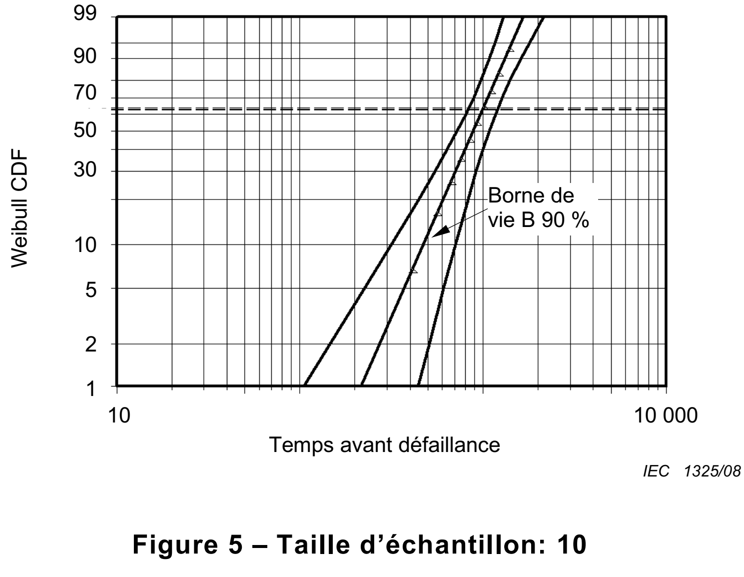


Figure 5 – Taille d'échantillon: 10

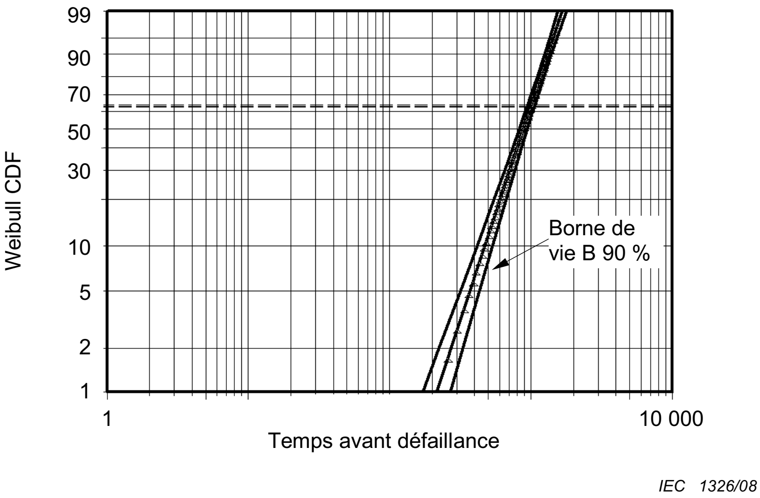


Figure 6 – Taille d'échantillon: 100

Le degré d'incertitude est le plus grand à l'extrémité de la distribution de Weibull, comme indiqué par les petites valeurs de F*(t)* lorsque la fraction défaillante est petite. Des échantillons dépassant 20 défaillances et des suspensions sont nécessaires pour différencier la distribution de Weibull des autres distributions.

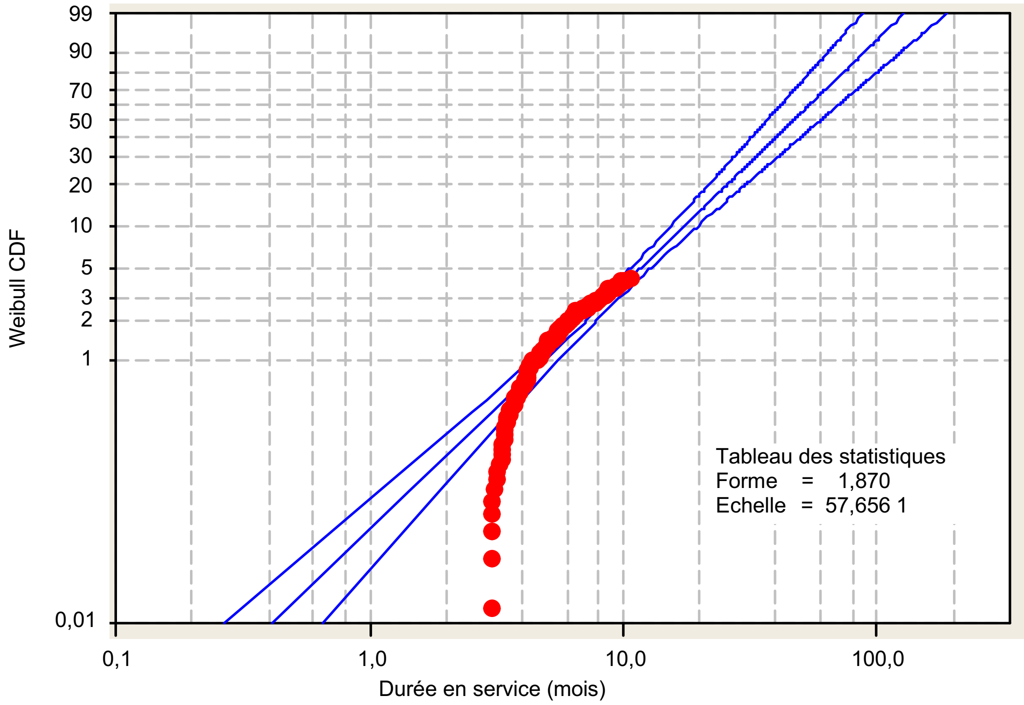
Il convient que décisions basées sur les résultats provenant d'un petit échantillon prennent en considération l'incertitude et, lorsque c'est possible, qu'elles soient affinées par la collecte et l'analyse de données supplémentaires.

8.4 Points aberrants

Parfois, pour certaines raisons, le premier ou le dernier point de certaines données est un point erratique et ne fait pas partie des données ; on l'appelle point aberrant. Ces points peuvent être importants dans l'analyse des données de durée de vie et, par conséquent, exigent une enquête sur l'enregistrement des données, des archives d'essai, des étalonnages d'instrumentation, etc. de façon à identifier la cause de la position extrême du point. Parfois, les points aberrants peuvent indiquer une population fragile ou des défauts de procédé, et sont donc très significatifs d'un point de vue d'assurance de la fiabilité.

8.5 Interprétation des tracés non-linéaires

Si les données sur un tracé de Weibull apparaissent disposées, comme illustré en Figure 7, ceci indique que le paramètre t_0 est différent de zéro. Avant de modifier le tracé, il est nécessaire de vérifier que le tracé contient plus d'un mode de défaillance. Si c'est le cas, se référer à l'Annexe G et pousser la recherche pour voir si ces modes sont en concurrence ou s'ils sont de simples mélanges.



IEC 1327/08

Figure 7 – Un exemple montrant un manque d'adéquation avec une distribution de Weibull à deux paramètres

La durée de vie minimale ne signifie pas «temps zéro», mais plutôt qu'il existe une durée de vie minimale ou une endurance minimale. «Age zéro» existe lorsqu'aucun des mécanismes de défaillance d'usure d'une entité n'a commencé à agir alors que «temps zéro» existe lorsqu'une entité n'a pas encore fonctionné. Par exemple, il peut être physiquement impossible pour le mode de défaillance de produire des défaillances instantanément, ou tôt dans la durée de vie. La Figure 8 montre les mêmes données que celles de la Figure 7 mais avec l'origine placée sur 2,99 mois. Ce tracé montre une droite adaptée aux données et est interprété comme une garantie de période sans défaillance (3 mois) durant laquelle la probabilité de défaillance est nulle.

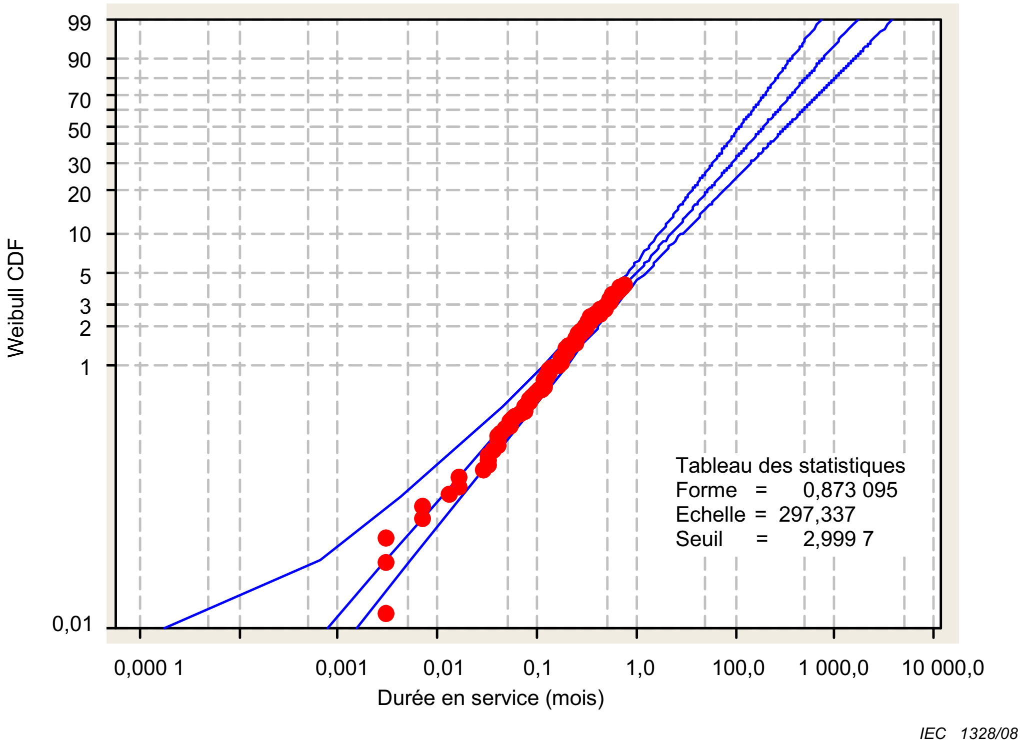


Figure 8 – Les mêmes données tracées avec une distribution de Weibull à trois paramètres montrent une bonne adéquation avec un décalage de 3 mois (positionnement – 2,99 mois)

La méthode consiste à soustraire t_0 = 3 mois de chaque point de la Figure 7 pour obtenir la Figure 8. Notons que l'échelle d'ordonnée de Weibull et la durée de vie caractéristique sont maintenant dans le domaine t_0. Pour reconvertir en temps réel, il faut ajouter à nouveau t_0. Ceci est un exemple de distribution de Weibull à trois paramètres avec le troisième paramètre, t_0, la période sans défaillance. Il convient de ne pas faire l'hypothèse d'une période sans défaillance sans justification technique. L'Annexe H donne un autre exemple de la distribution de Weibull à trois paramètres.

La distribution de Weibull à trois paramètres montrera une meilleure adéquation que la distribution de Weibull à deux paramètres simplement parce que c'est un modèle plus complexe. Il convient toujours d'obtenir les trois critères suivants avant d'utiliser la distribution de Weibull à trois paramètres:

a) le tracé de Weibull doit montrer une courbure concave;
b) il doit y avoir une explication physique des défaillances ne pouvant apparaître avant t_0;
c) un échantillon de plus grande taille, au moins 21 défaillances, doit être disponible. Si on a connaissance d'après des distributions de Weibull antérieures que le troisième paramètre est approprié, un échantillon de plus petite taille, huit à dix, peut être acceptable.

Les tracés concaves vers le bas sont beaucoup plus fréquents que les concaves vers le haut. Les concaves vers le haut suggèrent un t_0 négatif qui peut survenir lorsque les entités avec des défaillances d'usure ont subi des contraintes avant d'être soumises à l'essai. Il y a plusieurs façons d'estimer t_0. Une courbe peut être tracée face aux données et extrapolée vers le bas jusqu'à l'échelle de temps horizontale. L'intersection sera une approximation de t_0. Si la portion la plus précoce des données est manquante, t_0 peut compenser les données manquantes, bien que ceci ne soit pas toujours un succès. Par exemple, la Figure 9 montre les données de câble groupées par année de production et l'échelle d'âge en mois.

NOTE t_0 sera toujours inférieur au temps avant la première défaillance.

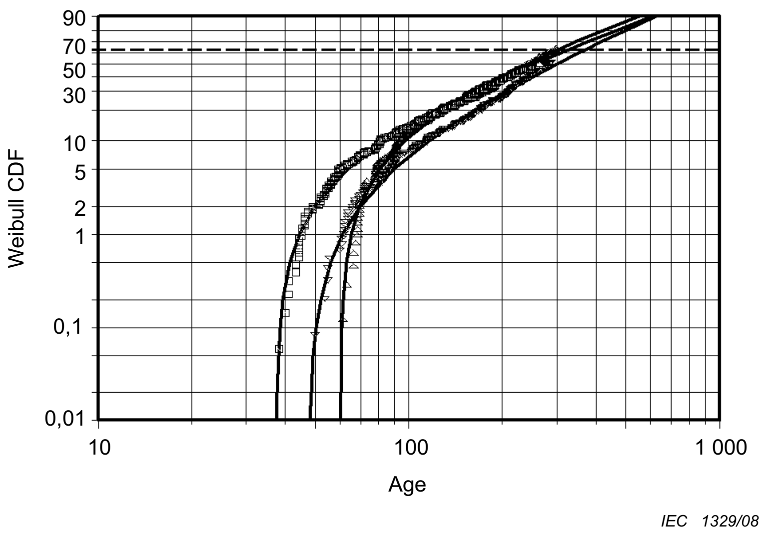


Figure 9 – Exemple d'estimation visuelle de t_0

En résumé, des tracés dont la concavité est orientée vers le bas indiquent que l'origine nécessite d'être décalée vers la droite, en soustrayant t_0 de chaque temps avant défaillance afin d'obtenir une ligne droite. Les tracés concaves orientés vers le haut indiquent que l'origine doit être décalée vers la gauche et t_0 doit être ajouté au temps avant défaillance pour obtenir une ligne droite. Le tracé d'échelle du temps «tel qu'enregistré» peut être plus facile à comprendre.

8.5.1 Distributions autres que de Weibull

Ils existent d'autres raisons à une faible adéquation à une ligne droite, c'est-à-dire quand les données forment une courbe sur le papier de Weibull. Une autre distribution peut mieux décrire les données. Si ceci est vrai, il convient d'utiliser la distribution qui décrit le mieux les données. Par exemple, la distribution log-normale n'est pas une des distributions de Weibull mais est applicable à des analyses de données de durée de vie. Les données log-normales tracées sur le papier de Weibull sont concaves vers le bas. Les mêmes données tracées sur un tracé de probabilité log-normal suivent une ligne droite.

Les données adaptées à un tracé de Weibull à trois paramètres et le tracé log-normal apparaissent incurvés vers le bas sur un tracé de Weibull à deux paramètres. Ces deux distributions peuvent modéliser des données avec le temps avant la première défaillance.

8.5.2 Incohérence de données et défaillances multi-modes

En se basant sur le tracé de Weibull des données, on peut déduire une hypothèse d'ingénierie. Il convient de confirmer cette hypothèse par une analyse de défaillance plus poussée. Les exemples comprennent:

a) les défaillances portent principalement sur des composants à défaillance à court terme alors que d'autres ne sont pas affectés, ce qui suggère un problème de lot;
b) les numéros de séries des composants défaillants sont proches les uns des autres, suggérant également un problème de lot;
c) les données font un coude en zigzag ou débordent lorsqu'on les trace sur le papier Weibull, ce qui résulte probablement d'un mélange des modes de défaillance;
d) le premier et le dernier point apparaissent de façon suspecte comme points aberrants, indiquant des problèmes de données ou peut-être la preuve d'un mode de défaillance différent.

9 Méthodes de calcul et adéquation

9.1 Introduction

La méthode d'estimation du maximum de vraisemblance (MLE) est une méthode de calcul pour les cas d'échantillons importants.

Parmi de nombreuses méthodes de calcul pour estimer les paramètres de la distribution de Weibull (voir [9][1], MLE a l'avantage de permettre une estimation des paramètres à partir de données établies avec des mécanismes de censure compliqués et des suspensions, lorsque le nombre d'entités en essai est important. Cet article décrit la MLE pour les données établies sans censure. Premièrement, le test d'adéquation est introduit pour vérifier l'hypothèse de Weibull. Si l'hypothèse n'est pas rejetée, procéder alors à la MLE.

Les méthodes dans les Articles 7 et 8 traitent de données avec censure unique ou multiple, tandis que les méthodes dans le présent article traitent uniquement de données avec censure unique (non de données à censures multiples).

9.2 Hypothèses et conditions

Un échantillon de n entités non réparées issues de la même population est soumis à l'essai à l'instant t = 0. L'environnement de l'essai doit être le même pour toutes les entités soumises à l'essai et les entités défaillantes ne sont pas remplacées après leur défaillance. Lorsque l'essai est arrêté au temps T, r entités sont défaillantes (T peut être égal ou supérieur à t_r). Le temps avant défaillance de chaque entité doit être connu. Il y a r temps avant défaillance: t_1, t_2, ..., t_r pour que $0 < t_i \leq T, i = 1, 2, ..., r$.

NOTE 1 Les procédures statistiques présentées dans cette norme supposent que l'on dispose d'un ordinateur. Bien que la plupart des formules, si ce n'est toutes, puissent être calculées avec une petite calculatrice programmable, il sera avantageux, pour l'utilisateur, de se servir d'un calculateur programmable avec imprimante et mémoire de masse.

NOTE 2 Les temps d'essai pour chaque entité doivent être effectués à partir du temps zéro.

9.3 Limitations et précisions

Ces procédures sont valides seulement pour des échantillons présentant au moins 10 défaillances. Les intervalles de confiance sont déterminés de façon approchée. Les censures multiples ne sont pas prises en compte dans cet article.

MLE est valide pour les échantillons de grande taille. Les intervalles de confiance sont approximativement valides pour des ensembles de données portant sur de grandes tailles d'échantillons. Bien que MLE puisse être appliquée à une large variété de mécanismes de censures et suspensions, seuls les cas de censure simple sont pris en considération ici.

9.4 Données d'entrée et de sortie

Les données à analyser sont les temps avant défaillance d'entités non réparées qui sont mises en essai. Ces temps avant défaillance doivent être connus exactement, contrairement à la connaissance des intervalles de temps. Il n'est pas nécessaire d'avoir les temps avant défaillance de toutes les entités en essai puisque l'essai peut être interrompu avant que toutes les entités soient défaillantes. Cependant, toutes les entités doivent être en état de fonctionnement au début de l'essai et l'essai doit être arrêté au même instant pour toutes les entités qui fonctionnent.

Entrées:

– nombre d'entités en essai n;

[1] Les chiffres entre crochets se réfèrent à la Bibliographie.

– temps avant défaillance de chacune des entités défaillantes rangées par ordre croissant: $t_1, t_2, \ldots, t_r$,

– niveau de signification, γ, ou niveau de confiance $(1 - \gamma)$; à spécifier.

Sorties:

– acceptation/rejet de l'adéquation;

– estimations et intervalles de confiance des paramètres d'échelle et de forme, η and β ;

– estimation du temps moyen avant défaillance ;

– limite inférieure de confiance de l'instant supposé pour lequel 10 % de la population sera défaillante, B10;

– limite inférieure de confiance de la fonction de fiabilité R(t).

9.5 Test d'adéquation

Etape 1 – Ranger les temps avant défaillance *r* par ordre croissant et calculer leurs logarithmes népériens $\ln(t_1) = x_1$, $\ln(t_2) = x_2, \ldots, \ln(t_r) = x_r$.

NOTE 1 $x_1 \le x_2 \le, \ldots, \le x_r$.

Etape 2 – Calculer les quantités ℓ_i suivantes, dans l'Équation (15) pour *i* = 1 jusqu'à (*r* – 1):

$$\ell_i = \frac{x_i + 1 - x_i}{\ln\left[\ln\left(\frac{4(n-i-1)+3}{4n+1}\right) \Big/ \ln\left(\frac{4(n-i)+3}{4n+1}\right)\right]} \tag{15}$$

Etape 3 – Calculer la quantité *H*, en utilisant l'Équation (16) et les quantités obtenues lors de l'étape 2:

$$H = \frac{\sum_{i=\lfloor r/2 \rfloor + 1}^{r-1} \frac{\ell_i}{\lfloor (r-1)/2 \rfloor}}{\sum_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{\ell_i}{\lfloor r/2 \rfloor}} \tag{16}$$

où le symbole $\lfloor x \rfloor$ est utilisé pour désigner le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Etape 4 – Rejeter l'hypothèse que les données suivent une distribution de Weibull avec un niveau de signification γ de 100 % si $H \ge F_\gamma\left(2\lfloor (r-1)/2 \rfloor, 2\lfloor r/2 \rfloor\right)$ et ne pas poursuivre l'analyse.

Sinon, aucune preuve ne permet de rejeter l'hypothèse d'une distribution de Weibull pour les temps avant défaillance, et l'analyse peut être poursuivie.

Les valeurs des fractiles de la fonction de distribution de Fisher F figurent, à titre d'exemple, dans la Table IV de l'ISO 2854.

NOTE 2 Dans l'hypothèse du rejet, il est recommandé d'examiner un graphique des données pour un mélange possible des populations, des temps de fonctionnement avant défaillance anormales ou autres anomalies. Ces situations sont analysées par des techniques qui dépassent le cadre de la présente norme.

9.6 MLE – Estimation des paramètres β et η de la distribution

La MLE des deux paramètres de la distribution de Weibull peut être obtenue numériquement comme solution des équations ci-dessous. La valeur de β qui satisfait à la première équation est la MLE de β. Cette valeur est utilisée dans la seconde équation pour déduire la MLE de η.

NOTE Un programme informatique peut être utilisé pour obtenir la valeur de β solution de l'Équation (17), puisque la convergence vers la valeur unique est en général très rapide.

Etape 1 – Trouver l'estimation de $\hat{\beta}$ qui satisfait l'Équation (17):

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\beta}\ln(t_i)+(n-r)T^{\beta}\ln(T)}{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\beta}+(n-r)T^{\beta}}-\frac{1}{\beta}\right]-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln(t_i)=0 \tag{17}$$

Etape 2 – Calculer la solution $\hat{\eta}$ en utilisant l'Équation (18) et la valeur de $\hat{\beta}$ obtenue à l'étape 1, à partir de l'équation:

$$\hat{\eta}=\left\{\frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\beta}}+(n-r)T^{\hat{\beta}}\right]\right\}^{\frac{1}{\hat{\beta}}} \tag{18}$$

9.7 Estimation du temps moyen avant défaillance

L'estimation du temps moyen avant défaillance, $\hat{m}$, est calculée en utilisant l'Équation (19) selon la formule:

$$\hat{m}=\hat{\eta}\,\Gamma(1+\frac{1}{\hat{\beta}}) \tag{19}$$

lorsque $\hat{\beta}$ et $\hat{\eta}$ sont obtenus à partir des étapes 1 et 2 de 9.6 et lorsque $\Gamma(z)$ est la fonction gamma de z telle que définie en NOTE 2 de la définition 2.56 de ISO 3534-1.

Le Tableau D.1 donne la valeur de $\Gamma(1+1/\beta)$ comme fonction de β. Pour les valeurs de β non listées dans ce tableau, une interpolation linéaire est acceptable.

NOTE 1 Dans les cas où la limite inférieure de confiance pour β est égale ou supérieure à 1 (cas d'usure), l'intervalle de confiance de η peut être utilisé comme une mesure grossière de l'intervalle de confiance du temps moyen avant défaillance, puisque dans ce cas les valeurs prises par la fonction gamma se situent entre 0,88 et 1.

NOTE 2 Le temps moyen avant défaillance (MTTF) est la valeur moyenne d'un certain nombre de temps avant défaillance. Les outils de fiabilité utilisés pour les données suivant une distribution exponentielle (taux de défaillance instantané constant) peuvent uniquement être utilisés pour les données de distribution de Weibull si β = 1. Il convient de noter que la distribution des temps avant défaillance est normalement non symétrique.

9.8 Estimation du fractile (10 %) du temps avant défaillance

Calculer $\hat{B}_{10}$ en utilisant l'Équation (20), estimation de B_{10}, instant pour lequel 10 % de la population en essai est en panne:

$$\hat{B}_{10}=\hat{\eta}\left[\ln\left(\frac{1}{0,9}\right)\right]^{1/\hat{\beta}} \tag{20}$$

9.9 Estimation de la fiabilité à l'instant t ($t \le T$)

L'estimation de la fiabilité à l'instant t est donnée par l'Équation (21):

$$\hat{R}(t)=\mathrm{e}^{-(t/\hat{\eta})^{\hat{\beta}}} \tag{21}$$

9.10 Programmes logiciels

Il existe de nombreux logiciels de statistique et de fiabilité qui donnent des estimations des paramètres des distributions de Weibull en utilisant à la fois les méthodes graphiques et/ou MLE, non seulement pour les données à censures uniques et multiples mais aussi pour des données plus générales incomplètes compliquant les mécanismes censurés et suspendus.

10 Intervalles de confiance

10.1 Estimation de l'intervalle de β

Etape 1 – Calculer les constantes C, β_1 et β_2 en utilisant le rapport $q = r/n$ et les Équations (22), (23) et (24:

$$C = 2{,}14628 - 1{,}361119\, q \tag{22}$$

$$\beta_1 = \chi^2_{\gamma/2}\left[(r-1)\, C\right] \tag{23}$$

$$\beta_2 = \chi^2_{1-\gamma/2}\left[(r-1)\, C\right] \tag{24}$$

où $\chi^2_p(\nu)$ est le fractile p de la loi de distribution du χ^2 à ν degrés de liberté.

Puisque le nombre de degrés de liberté $(r - 1)C$ n'est pas en général un nombre entier, il convient de calculer les fractiles du χ^2 soit en utilisant un programme informatique, soit par interpolation en utilisant le Tableau III de l'ISO 2854 ou le Tableau D.1 de la CEI 60605-4:2001.

Etape 2 – Calculer les facteurs multiplicateurs w_1 et w_2 en utilisant les Équations (25) et (26).

$$w_1 = \left[\frac{\beta_1}{r\,C}\right]^{\frac{1}{1+q^2}} \tag{25}$$

$$w_2 = \left[\frac{\beta_2}{r\,C}\right]^{\frac{1}{1+q^2}} \tag{26}$$

Etape 3 – Calculer l'intervalle de confiance à $(1 - \gamma)$ 100 % de β en utilisant l'Équation (27):

$$(w_1\hat{\beta}, w_2\hat{\beta}) \tag{27}$$

NOTE On peut utiliser les intervalles de confiance pour β à titre de comparaison. Puisque une valeur de $\beta > 1$ met en évidence l'usure et une valeur de $\beta < 1$ indique les défaillances précoces, l'intervalle de confiance pour β peut être utilisé pour analyser ces hypothèses. Inversement, si l'intervalle de confiance pour β contient la valeur $\beta = 1$, les entités à examiner peuvent se rapporter à une population dont le taux de défaillance est constant. Un test formel relatif à un taux de défaillance constant est développé dans [10].

10.2 Estimation de l'intervalle de η

Etape 1 – Calculer les constantes A_4, A_5 et A_6, en utilisant le rapport $q = r/n$ et les Équations (28), (29) et (30):

$$A_4 = 0{,}49q - 0{,}134 + 0{,}622q^{-1}; \tag{28}$$

$$A_5 = 0{,}2445\,(1{,}78 - q)\,(2{,}25 + q); \tag{29}$$

$$A_6 = 0{,}029 - 1{,}083\,\ln\,(1{,}325q). \tag{30}$$

Etape 2 – Mener l'étape 2a si l'essai a été arrêté avant que toutes les entités soient défaillantes, c'est-à-dire si $r < n$ ou mener l'étape 2b si tous les temps avant défaillance sont connus, c'est-à-dire si $r = n$.

Etape 2a ($r < n$) – Calculer les constantes A_3, d_1, d_2, A_1 et A_2 utilisant les Équations (31), (32), (33) et (34):

$$A_3 = -A_6\, x^2 \tag{31}$$

où $x = u_{(1-\gamma/2)}$ et u_p est le fractile d'ordre p de la loi de distribution normale donné au Tableau D.2.

$$d_1 = \frac{A_3 + x\sqrt{x^2\left(A_6^2 - A_4A_5\right) + rA_4}}{r - A_5x^2} \tag{32}$$

$$d_2 = \frac{A_3 - x\sqrt{x^2\left(A_6^2 - A_4A_5\right) + rA_4}}{r - A_5x^2} \tag{33}$$

$$A_1 = \mathrm{e}^{\left(-d_1/\hat{\beta}\right)} \;;\; A_2 = \mathrm{e}^{\left(-d_2/\hat{\beta}\right)} \tag{34}$$

Etape 2b ($r = n$) – Calculer les grandeurs d_3, A_1 et A_2, utilisant les Équations (35), (36) et (37):

$$d_3 = t_{(1-\gamma/2)}\,(n-1) \tag{35}$$

où $t_p(r-1)$ est le fractile d'ordre p de la loi de distribution de Student t à $(r-1)$ degrés de liberté et peut être déterminé en utilisant le tableau IIa de l'ISO 2854 (cas des abscisses positives);

$$A_1 = \mathrm{e}^{\left(\frac{-1,053d_3}{\hat{\beta}\sqrt{n-1}}\right)} \tag{36}$$

$$A_2 = \mathrm{e}^{\left(\frac{1,053d_3}{\hat{\beta}\sqrt{n-1}}\right)} \tag{37}$$

où $\hat{\beta}$ est la valeur obtenue à l'étape 1 de 9.6.

Etape 3 – Calculer l'intervalle de confiance à $(1-\gamma)$ 100 % de η en utilisant l'Équation (38):

$$(A_1\hat{\eta}, A_2\hat{\eta}) \tag{38}$$

où $\hat{\eta}$ est la valeur obtenue à l'étape 2 de 9.6.

10.3 Bornes d'une régression de rang médian Bêta-binomiale

La déduction de ces bornes est directement liée à la détermination des rangs médians. Ces bornes sont calculées à partir de la distribution Bêta-binomiale, une distribution binomiale modifiée qui est utilisée pour évaluer la distribution Beta comme décrit par Johnson [14]. Les suspensions nécessitent une interpolation dans les rangs 5 % et 95 %. Ces intervalles Bêta-binomiaux sont légèrement conservateurs (l'intervalle est trop large), comparés à la matrice de Fisher et aux méthodes de rapport de vraisemblance.

La méthode pour convertir les rangs 5 % et 95 % en intervalles fournit des intervalles pour le temps avant défaillance. Les équations suivantes (39) et (40) sont en relation avec les rangs 5 % et 95 % de l'Annexe C à la courbe de Weibull.

$$t_{i,0,95} = \eta \left[\ln \left(\frac{1}{(1 - F_{i(0,95)})} \right) \right]^{\left(\frac{1}{\beta}\right)} \tag{39}$$

$$t_{i,0,05} = \eta \left[\ln \left(\frac{1}{(1 - F_{i(0,05)})} \right) \right]^{\left(\frac{1}{\beta}\right)} \tag{40}$$

10.4 Bornes de la matrice de Fisher

L'utilisation des bornes de la matrice de Fisher possède des avantages significatifs sur l'approche Bêta-binomiale. De plus, pour les échantillons de taille modérée, le niveau de confiance apparent est plus proche du niveau requis, bien que plus optimiste, que pour l'approche Bêta-binomiale. Pour 10 défaillances ou moins, ces bornes sont trop optimistes (voir référence [20]).

10.5 Limite de confiance inférieure pour B_{10}

Calculer la limite inférieure de l'intervalle de confiance à (1 – γ) 100 % de B_{10} en utilisant les Équations (41), (42), (43) et (44):

$$h_1 = \ln\left[-\ln(0,9)\right] \tag{41}$$

$$\delta_1 = \frac{-A_6 x^2 - r h_1 + x\sqrt{\left(A_6^2 - A_4 A_5\right) x^2 + r A_4 + 2 r h_1 A_6 + r A_5 h_1^2}}{r - x^2 A_5} \tag{42}$$

où $x = u_\gamma$ est le fractile γ de la distribution normale donné dans le Tableau D.2 et où A_4, A_5 et A_6 sont calculés selon l'étape 1 de 10.2.

$$Q_1 = \mathrm{e}^{\left(-\frac{\delta_1 + h_1}{\hat{\beta}}\right)} \tag{43}$$

$$B_{10}\Big|_{\text{limite inférieure}} = Q_1 \hat{B}_{10} \tag{44}$$

10.6 Limite de confiance inférieure pour R

Calculer la limite inférieure de l'intervalle de confiance à (1 –γ) 100 % de la fiabilité à l'instant t, $R_{1-\gamma}\Big|_{\text{lower limit}}$ en utilisant les Équations (45), (46) et (47):

$$C_\mathrm{t} = \hat{\beta} \ln\left(\frac{\hat{\eta}}{t}\right) \tag{45}$$

$$A_0 = A_4 + C_\mathrm{t}^2 A_5 - 2 C_\mathrm{t} A_6 \tag{46}$$

où A_4, A_5 et A_6 sont calculés selon l'étape 1 de 10.2.

$$R_{1-y}\Big|_{\text{limite inférieure}} = \exp\left(-\exp\left[-C_{\text{t}} + x\sqrt{\frac{A_0}{r}}\right]\right) \tag{47}$$

où $x = u_\gamma$ est le fractile γ de la loi de distribution normale, donné dans le Tableau D.2.

11 Comparaison des méthodes de régression du rang médian (MRR) et d'estimation du maximum de vraisemblance (MLE)

11.1 Présentation graphique

La méthode de régression du rang médian, MRR, fournit une présentation graphique des données. Elle aide à identifier les instances de faible adéquation des tracés de la distribution de Weibull suggérant ainsi une autre distribution, plutôt qu'un mode de défaillance affectant les entités, des mélanges de modes de défaillance, des problèmes de lot ou des points aberrants. La MLE ne donne pas une présentation graphique des données.

11.2 Estimation de la durée de vie B parfois identifiée comme percentiles B ou L

La méthode de régression du rang médian, MRR, fournit des estimations plus précises des percentiles «bas» comme la durée de vie B, à partir d'échantillons de petites tailles. Ces durées de vie de percentiles «bas» B et leur adéquation à des fiabilités élevées peuvent être extrêmement importantes pour les aspects de sécurité, les garanties et les obligations contractuelles. Les durées de vie B issues de l'application de la méthode du maximum de vraisemblance tendent à être biaisées de façon optimiste lorsque le nombre de défaillances est faible.

11.3 Echantillons de petites tailles

Les prévisions de défaillance issues de la méthode de régression du rang médian sont souvent plus précises pour de petits échantillons mais dépendent beaucoup de la forme et de la distribution des âges des suspensions. Cependant, si l'ensemble des données est introduit dans un ordinateur, il est recommandé que MRR et MLE soient utilisées simultanément pour de petits échantillons. Dans la plupart des cas, les deux ensembles de résultats seront raisonnablement en bon accord, assurant alors une relativement bonne adéquation avec Weibull.

Des conseils d'ordre généraux identifiant la méthode la plus appropriée à propos de la taille de l'échantillon sont:

– Pour 20 points de donnée ou moins, avec ou sans temps de censure, la méthode de régression du rang médian (MRR) est préférable.
– Avec un ensemble de données contenant moins que 10 points de données, l'analyse de Weibull est préférable lorsque la connaissance du paramètre de pente, β, est disponible en amont.
– Pour les autres ensembles de données, il convient de comparer les résultats MRR et MLE. Des résultats similaires proches pour les estimations MRR et MLE, avec une bonne régression et bonnes mesures de vraisemblance, fourniront ensemble l'assurance que les données sont correctement modélisées par une distribution de Weibull (il convient de considérer également la comparaison à d'autres modèles.) Cependant, une importante anomalie entre l'estimation MRR et MLE indiquera que les données ne sont pas correctement modélisées et peuvent contenir des populations multiples. Il convient d'enquêter en détail sur toute anomalie de la sorte.

11.4 Paramètre de forme β

La MLE tend à surestimer le paramètre de forme β pour de petits échantillons. La pente du tracé de Weibull est souvent trop forte. La pente des tracés «log-normal» et «normal» est de même biaisée, trop forte, si l'écart-type de la MLE est sous-estimé.

11.5 Intervalle de confiance

Les estimations d'intervalle par la MLE sont rigoureuses; elles sont ajustées pour les petites tailles d'échantillons. Il est recommandé d'utiliser les estimations d'intervalle pivotant pour la MRR.

11.6 Défaillance unique

La MLE peut fournir une solution pour une défaillance et quelques suspensions correctes ou tardives. Son utilisation est certes entachée de fortes incertitudes, mais, dans certaines situations, elle ne peut être évitée puisqu'elle donne l'unique solution si β n'est pas connu. Weibayes est préférable si on connait déjà β.

11.7 Rigueur mathématique

Il existe une objection mathématique à l'utilisation de la méthode des moindres carrés pour la régression du rang. La dispersion résiduelle autour de la courbe n'est pas uniforme. Les résultats sont tels que l'extrémité basse de la courbe tend à être surchargée, comparée à l'extrémité haute. Cependant, comme tout l'intérêt pour l'ingénierie se situe dans l'extrémité basse de la courbe, ce qui est acceptable pour les ingénieurs ne l'est pas pour les statisticiens. MLE possède donc des qualités mathématiques attractives.

11.8 Présentation des résultats

Il est souvent préférable de garder une présentation des résultats simple et concise pour améliorer la communication. Les tracés de régression du rang sont préférés dans ce but. Les tracés MLE avec des points de données situés sur les rangs médians ne sont pas recommandés puisqu'ils peuvent amener des commentaires sur la faible adéquation de la courbe de Weibull.

12 Approche WeiBayes

12.1 Description

Dans l'analyse de Weibayes, on suppose le paramètre de forme, β, à, partir de l'historique des données de défaillance, des expériences précédentes, ou à partir de la connaissance d'ingénierie en physique de la défaillance. Weibayes est définie comme l'analyse de Weibull avec un paramètre β donné. Il s'agit d'un paramètre unique (η) de la distribution de Weibull. La méthode de Weibayes peut être utilisée pour analyser les ensembles de données et en l'absence de défaillance, où les deux types de données peuvent avoir des suspensions.

12.2 Méthode

Soit β, l'Équation (48) peut être dérivée en utilisant la méthode de vraisemblance maximale pour déterminer la caractéristique de durée de vie, η :

$$\eta = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{t_i^{\beta}}{r} \right]^{1/\beta} \tag{48}$$

où

t est le temps ou les cycles;

r est le nombre d'entités défaillantes;

N est le nombre total de défaillance incluant les suspensions;

η est l'estimation du maximum de vraisemblance de la durée de vie caractéristique.

Avec β comme hypothèse et η calculé à partir de l'Équation (48), une distribution de Weibull est définie. Une courbe Weibayes est tracée sur le papier de probabilité de Weibull. Le tracé de Weibayes est utilisé exactement comme tout autre tracé de Weibull. Les estimations des durées de vie B, prévisions de défaillance, et fiabilité sont disponibles à partir d'analyse de Weibayes.

12.3 WeiBayes sans défaillance

Dans de nombreux cas de Weibayes, aucune défaillance ne survient. Par exemple, un composant reconçu peut avoir été testé sans défaillance observée. Dans ce cas, une seconde hypothèse est nécessaire. La première défaillance est présumée imminente, soit dans l'équation, établir r = 1,0. Comme aucune défaillance ne survient, il s'agit d'une hypothèse d'ingénierie conservative. La courbe de Weibayes résultante est de même conservative. Statistiquement, la courbe Weibayes, basée sur une défaillance présumée, est une estimation de confiance plus basse dans un sens donné. Ceci étant, on peut établir 63,2 % de niveau de confiance que la vraie distribution de Weibull s'étend à droite de la courbe de Weibull, si l'hypothèse de β est correcte.

Les courbes de Weibayes peuvent être obtenues pour tous niveaux de confiance en employant des dénominateurs plus grands ou plus petits (on suppose des défaillances imminentes).

Confiance	50 %	63,2 %	90 %	95 %	99 %
Dénominateur	0,693	1,0	2,3	3,0	4,6

12.4 WeiBayes avec défaillances

Lorsque le dénominateur est basé sur des défaillances réelles, le paramètre d'échelle, η , est une estimation issue de l'application de la méthode du maximum de vraisemblance (estimation MLE). Une caractéristique intéressante des estimations MLE est qu'elles sont invariables sous la transformation. Ce qui signifie que la courbe Weibayes résultante, temps de durée de vie B, et estimations de fiabilité sont toutes des estimations MLE. La courbe Weibayes est une estimation MLE de la vraie distribution de Weibull inconnue, soit une distribution de Weibull nominale.

Les distributions de Weibull basées sur les échantillons de 2 ou 3 défaillances sont entachées de grandes incertitudes. S'il existe une bonne connaissance de β à partir de données précédentes, des améliorations significatives peuvent être obtenues avec la courbe de Weibayes. La courbe de Weibayes peut offrir des réductions de coût au travers d'essais limités sans perte de précision. Une bibliothèque de distribution de Weibull ou banque de données pour fournir les historiques de pente de distribution de Weibull est fortement recommandée afin de profiter des avantages de l'analyse de Weibayes.

La distinction entre zéro défaillance et une défaillance de Weibayes vaut la peine d'être revue. Par exemple, on suppose que cinq unités reconçues ont été essayées sans défaillance. Une courbe de Weibayes est calculée sur la base de la valeur de β estimée à partir de la conception originale. Il s'agit d'un intervalle de confiance bas dans un sens donné pour la véritable courbe de Weibull inconnue pour la nouvelle conception. A présent, les mêmes données incluent une défaillance et quatre suspensions.

La courbe de Weibayes résultante est identique à la première zéro défaillance de Weibayes, mais l'interprétation est différente. Avec une défaillance, la courbe de Weibayes est une estimation MLE nominale de la véritable distribution de Weibull, et non un intervalle de confiance. Cependant, une borne de confiance inférieure pour la courbe Weibayes MLE peut être calculée en utilisant le Khi-deux [20].

Si r est le nombre de défaillances (≥1), la limite de confiance inférieure C % pour η est donnée par Équation (49):

$$\eta_c = \eta_{MLE} \left(2\,r / \chi_C^{\;2}(2r+2)\right)^{(1/\beta)} \tag{49}$$

En utilisant η_c et β, la borne de confiance inférieure pour la véritable courbe de Weibayes est définie.

12.5 Etude de cas WeiBayes

Quinze défaillances de compresseurs ont été expérimentées sur une large flotte de moteurs d'avion. L'analyse de Weibull fournit un β approximativement égal à 5,0. Trois cas de compresseurs reconçus ont été essayés dans les moteurs jusqu'à 1 600 h, 2 900 h et 3 100 h sans défaillance. Ces essais sont-ils suffisants pour établir que la nouvelle conception est significativement meilleure que l'ancienne? En supposant β = 5,0 et les temps sur les trois unités reconçues, la durée de vie caractéristique peut être estimée pour une solution de Weibayes.

$$n = \left[\frac{(1\,600)^5 + (2\,900)^5 + (3\,100)^5}{1}\right]^{1/5} = 3\,468\ \text{h} \tag{50}$$

La courbe de Weibayes est tracée Figure 10. Il peut être établi avec une confiance à 63 % que la distribution de Weibull pour les unités reconçues est à la droite de cette courbe et, par conséquent, significativement meilleure que celles des unités en version nominale actuelle. Il est possible que la nouvelle conception ait éliminé ce mode de défaillance mais cela ne peut être prouvé avec cet échantillon de données. Plus de temps étant imparti sur ces unités sans défaillance, la courbe Weibayes augmentera vers la droite et plus d'assurance sera gagnée des lors que le mode de défaillances a été éliminé. L'hypothèse de pente, dans ce cas, est basée sur un modèle de défaillance Weibull établi.

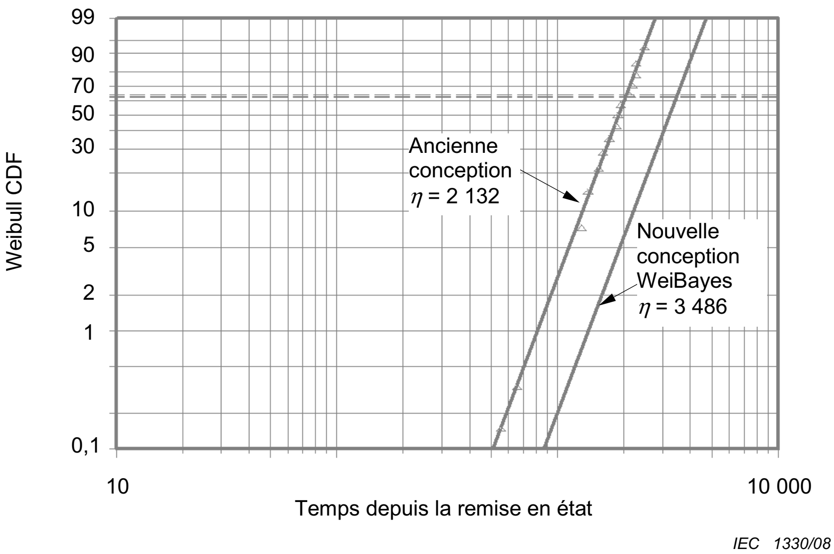


Figure 10 – Nouvelle conception WeiBayes de compresseurs par rapport à l'ancienne conception

Lorsqu'on réalise des essais sur des entités très fiables, on observe souvent un très petit nombre de défaillances, ou zéro défaillance ou juste une défaillance. Ceci ne permet pas d’estimer les paramètres d'une distribution de Weibull à deux ou trois paramètres.

Dans les cas où la valeur de β pour le mode de défaillance correspondant est connue par des essais précédents, une estimation approximative peut toujours être faite avec zéro ou une défaillance. De plus, l’estimation de la meilleure ligne droite à travers un petit nombre de points peut être améliorée si la valeur β est connue. L’information disponible peut alors être utilisée pour estimer la valeur η .

13 Méthode de la mort subite

Les essais de mort subite nécessitent de petits sous-groupes d’entités en essai, environ trois à huit entités, l’essai consistant à faire fonctionner toutes les entités simultanément jusqu'à la première défaillance. Pour un sous-groupe de quatre, cela mène à des données sur une défaillance et à trois suspensions au même moment. Peut-être quatre à dix entités dans chaque sous-groupe peuvent être essayées dans des plans de mort subite typiques. Dix ensembles de quatre entités mènent à dix défaillances et 30 suspensions. La mort subite apporte un compromis par rapport à l’essai de toutes les entités jusqu’à défaillance, c’est-à-dire un accroissement de l’incertitude en contrepartie d'une réduction importante du temps d'essai. Dans l'industrie des paliers de roulement par exemple, la méthode de mort subite avec des sous-groupes de quatre est mondialement employée et l’analyse fournit une estimation de la durée de vie L16. Dans d’autres industries, des estimations de la durée de vie L1 sont plus courantes à partir d’essai de mort subite.

La méthode de la mort subite est utilisée pour déterminer le temps associé à un pourcentage spécifié de défaillances. Ce point de la courbe de Weibull sera déterminé avec une précision élevée alors que le reste de la courbe de Weibull, particulièrement la pente de la courbe, est déterminée avec moins de précision qu’avec un essai de Weibull conventionnel. L’avantage de la méthode de la mort subite réside dans un temps d’essai plus court que pour un essai de Weibull conventionnel.

Souvent, l’information requise est le temps avant l’usure, soit le temps avant un pourcentage bas mais significatif de défaillance, par exemple 10 %. Ce nombre est largement utilisé pour établir la durée de vie de roulements, les valeurs appelées L10 , quelquefois également appelées valeurs B10. Le temps avant défaillance pour d’autres pourcentages obtenu à partir du tracé de Weibull, peut être estimé en utilisant le Tableau 4.

Dans une méthode de mort subite, la valeur L8,3 (8,3 % de défaillance) peut être estimée, par exemple. Cette valeur peut être établie comme une estimation conservative de la valeur L10, ou être établie comme la meilleure estimation pour L8,3.

La procédure suivante est utilisée pour estimer le temps LX (le temps jusqu’à X pour cent de défaillances):

a) Diviser le nombre disponible d’échantillons de façon aléatoire dans les sous-groupes A, chacun consistant en des composants B conformes au Tableau 4;
b) soumettre tous les sous-groupes à l’essai;
c) enregistrer le temps avant la première défaillance dans chaque sous-groupe;
d) arrêter l’essai d’un sous-groupe dès que la première défaillance survient dans ce sous-groupe;
e) tracer le temps avant la première défaillance à partir de chaque sous-groupe sur un diagramme de Weibull, traitant le reste des entités dans chaque sous-groupe comme suspendu au temps de la première défaillance dans ce sous-groupe.
f) lire le temps jusqu’à LX sur le tracé comme d'habitude.

NOTE 1 Dans ce cas, le point LX est estimé avec une meilleure précision, alors que la courbe de Weibull peut être utilisée pour estimer le temps pour d'autres pourcentages de défaillance, de même que l'estimation de la pente de la courbe de Weibull. Toutefois, un plus grand nombre de suspensions entraînerait une plus grande incertitude. Ceci est particulièrement important lorsque les temps jusqu'à d'autres pourcentages de défaillance sont lus sur la courbe.

NOTE 2 Les sous-groupes de quatre sont souvent utilisés pour les essais de mort subite, du fait de l'économie en nombre de bancs d'essai requis.

Tableau 4 – Taille de sous-groupe pour estimer le temps jusqu'à X % défaillances utilisant la méthode de mort subite

Taille du sous-groupe B	Rang médian précis pour 1 défaillance	LX estimé en essai
2	0,292 9	L30
3	0,206 3	L20
4	0,159 1	L16
5	0,129 4	L13
6	0,109 1	L10
7	0,094 3	L9
8	0,083 0	L8
9	0,074 1	L7
10	0,067 0	L6
50	0,013 8	L1
70	0,009 94	L1

La valeur LX estimée dans un essai de mort subite est presque aussi fiable que si tous les composants dans chaque sous-groupe avaient été soumis à des essais de défaillance, mais l'intervalle de confiance est approximativement 50 % plus large. Un essai de mort subite peut être réalisé beaucoup plus vite qu'un essai de défaillance sur tous les composants. Par exemple, pour β = 1, le temps d'essai est seulement 25 % du temps pour faire les essais de défaillance sur tous les composants à condition que les sous-groupes subissent les essais de façon séquentielle. Si tous les sous-groupes sont soumis à l'essai simultanément, le temps requis est environ 7 % seulement du temps requis pour les essais de défaillance sur tous les composants.

Le rapport des temps d'essai peut être estimé en utilisant les temps moyens avant défaillance. Les fabricants qui emploient la mort subite réduisent le temps d'essai en construisant les plateaux de mort subite qui soumettent ensemble et à la même charge tous les sous-groupes.

Exemple: ci-dessous les données de 12 défaillances lors de cycles.

Tableau 5 – Données en chaîne – Nombre de cycles avant défaillance

Sous-groupe 1	Sous-groupe 2	Sous-groupe 3	Sous-groupe 4
Suspendu à 3 698	Suspendu à 4 650	Suspendu à 2 398	**Défaillance à 2 945**
Défaillance à 3 698	Suspendu à 4 650	Suspendu à 2 398	Suspendu à 2 945
Suspendu à 3 698	**Défaillance à 4 650**	**Défaillance à 2 398**	Suspendu à 2 945

Pour l'essai de mort subite, le rang moyen, (1/(N + 1)), pour la première des trois est 1/4. La durée de vie correspondante B est B25. Pour une courbe de Weibull avec β = 2,13, la durée de vie B25 est 0,557η et le rapport de MTTF à η est 0,885 8. Par conséquent, le rapport des temps d'essai pour la mort subite est (0,557 x 4)/(0,885 8 x 12) ou approximativement 0,2. En comparant les bornes de confiance de la matrice de Fisher pour les 10 réglages des trois avec la courbe de Weibull pour les 12 défaillances, on obtient une augmentation d'environ 27 % dans l'incertitude de statistique de durée de vie B1 en comparaison à des essais de défaillance sur les 12. Cette augmentation de l'incertitude est accompagnée d'une réduction de 80 % du temps d'essai.

NOTE 3 Les données peuvent aussi être analysées en traitant les sous-groupes comme des échantillons uniques.

14 Autres distributions

Si x suit une distribution de loi log-normale, la distribution de x sera biaisée vers la droite et log x aura une distribution normale en cloche.

La distribution log-normale a de nombreuses applications. La distribution des tailles de défauts, paramètres de radio-fréquences (RF) et la durée de réparation sont des exemples typiques. Peut-être les cas les plus importants sont-ils la détérioration progressive, telle que la perte de performance, la croissance de fêlure jusqu'à rupture et les augmentations dans l'amplitude des vibrations, si la vitesse de variation augmente avec la détérioration. Si la vitesse de variation est linéaire ces distributions tendront à être de type Weibull.

Physiquement, la distribution log-normale modélise un processus où le temps avant défaillance résulte de la multiplication d'effets. Par exemple, la détérioration peut être progressive, une fêlure peut augmenter rapidement sous de fortes contraintes parce que la contrainte augmente progressivement au fur et à mesure que la fêlure grandit. Dans ce cas, le taux de croissance sera du type log-normale. D'un autre côté, si le taux de défaillance est linéaire dans le temps, comme il peut l'être dans une zone à faible contrainte, la distribution de Weibull sera plus appropriée. La loi log-normale a de nombreuses applications telles que les propriétés des matériaux, revenus personnels, héritages, dépôts de banque, les taux de croissance de fêlure et la distribution des tailles de défaut.

Alors qu'il existe de nombreuses distributions statistiques autres que Weibull, la distribution log-normale est le second choix pour l'analyse de données de vie. Il convient que la distribution log-normale soit le premier choix s'il existe une bonne information préalable et plus de vingt défaillances. Par exemple, de nombreuses caractéristiques de matériaux suivent la distribution log-normale. Le temps avant réparation et la croissance de fêlures jusqu'à rupture suivent souvent une loi log-normale. Le fait de savoir que les propriétés physiques des défaillances indiquent une détérioration progressive est aussi un indice que les données suivent une loi log-normale. Certaines défaillances de puces de semi-conducteurs suivent une loi log-normale. La distribution du paramètre de Weibull, β, est approximativement log-normale, alors que η suit une loi plus proche de la distribution normale.

Annexe A
(informative)

Exemples et études de cas

A.1 Défaillances à court terme

La Figure A.1 est un exemple de défaillances de composants à court terme pour des pompes primaire à huile. Les moteurs des turbines à gaz sont mis en essai avant d'être expédiés au client, étant donné que plus de 1000 de ces moteurs se sont avérés sans problème, d'où vient l'erreur ? Après examen des pompes défaillantes, on a trouvé qu'elles contenaient des pièces de dimensions trop fortes. Quelque chose avait changé dans le procédé de fabrication créant un problème de lot. Les pièces trop grandes interfèrent avec la mécanique dans la pompe provoquant une défaillance. La traçabilité a permis de remonter à une machine-outil et de corriger. Les défaillances à court terme peuvent suggérer l'usure en ayant une pente supérieure à 1, mais plus souvent, elles montrent une défaillance précoce, avec des pentes inférieures à 1. Les défaillances à court terme révèlent un changement de production ou de procédé d'assemblage, particulièrement lorsqu'il y a de nombreuses entités sans problème en exploitation. La révision et la maintenance programmée peuvent également produire ces effets de "discontinuité". Le temps écoulé depuis la révision ou la maintenance peut donner un indice. La présence de nombreuses suspensions tardives peut également révéler un problème de discontinuité.

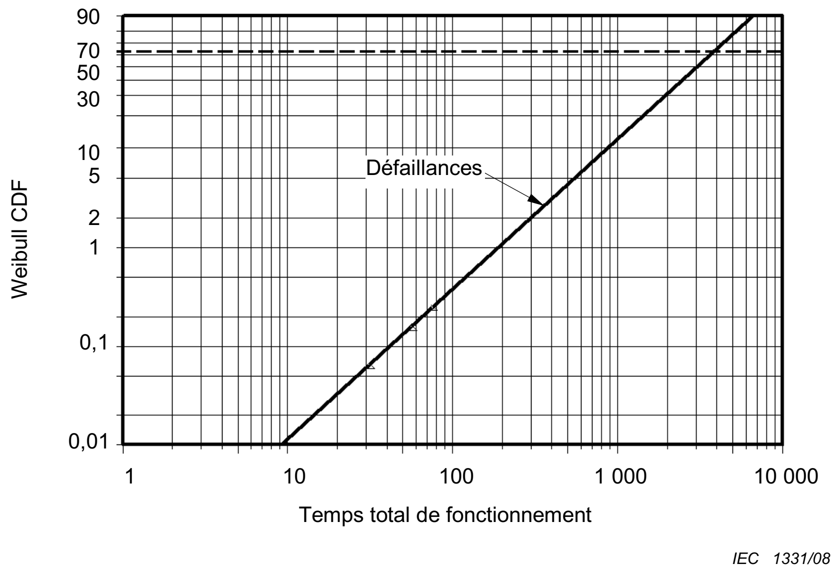


Figure A.1 – Court terme pour une pompe primaire à huile

A.2 Numéros de série rapprochés

Le même raisonnement peut être étendu à d'autres regroupements de défaillances particulières. Par exemple, si les entités n'ont pas de défaillances à court terme, des entités défaillantes à moyen terme et les entités sans défaillance à long terme, alors un problème de lot est suspecté. Quelque chose peut avoir changé dans le procédé de fabrication pendant une courte période et changé à nouveau. La proximité des numéros de série des pièces défaillantes suggère un problème de lot. La Figure A.2 est un premier exemple d'un changement de processus survenu en plein milieu de production. Des roulements étaient défaillants dans les nouveaux dispositifs de poussée. Les défaillances surviennent sur une période de 200 h à 400 h. Au moins 650 entités survivent au plus longtemps que le temps avant défaillance le plus élevé. Ces défaillances ont été tracées par rapport à un changement de procédé qui a été incorporé pour réduire les coûts de fabrication des cages de roulements. Ces exemples montrent une faible adéquation à une distribution de Weibull puisqu'il y a au moins deux modes de défaillance dominants dans les données montrées dans la Figure A.2.

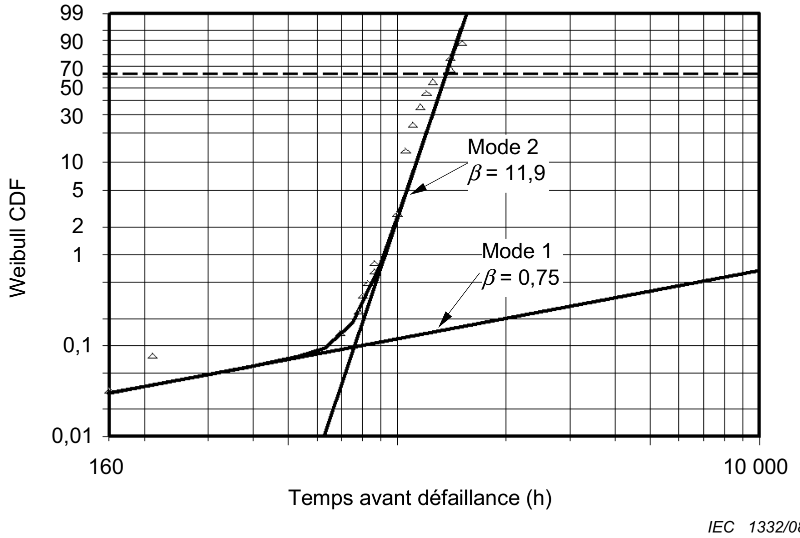


Figure A.2 – Défaillance de roulements de pompes d'un dispositif de poussée

A.3 Pentes élevées

Des précautions sont suggérées pour les pentes β supérieures à 4. Un tracé abrupt cache souvent des courbures cachées, des points aberrants ou des décentrages et les significations qui en résultent dans les données suivent cette voie. La pente abrupte cache souvent des données de Weibull erronées. Toute la signification des données telles que les courbures, points aberrants, décentrages tend à disparaître. Apparemment des Weibull satisfaisantes peuvent avoir une faible adéquation. Un exemple est donné à la Figure A.3. Ici, à première vue, les tracés semblent bien correspondre, mais il y a une courbure et peut être un point aberrant.

NOTE La pente abrupte des courbes de Weibull est préférable d'un point de vue ingénierie, à condition que la valeur de η soit suffisamment élevée.

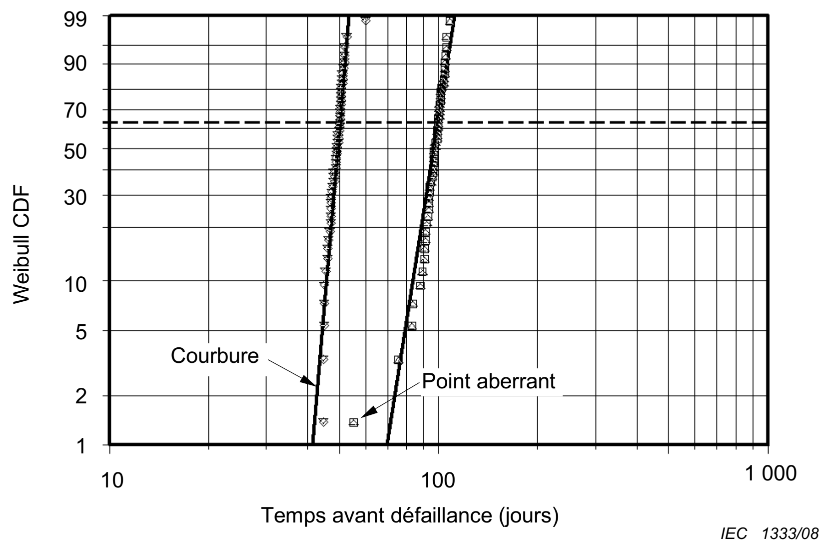


Figure A.3 – Problèmes cachés par des valeurs de pente β abruptes

Annexe B
(informative)

Exemple de calculs

Cet exemple est fourni à titre d'application numérique pour vérifier la précision des programmes informatiques qui mettent en œuvre les procédures MRR et MLE de la présente norme.

Quarante entités sont soumises à l'essai. L'essai est interrompu à l'instant de la 20e défaillance. Les temps de bon fonctionnement avant défaillance, pour les 20 premières entités défaillantes, sont donnés ci-dessous:

Tableau B.1 – Temps avant défaillance

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	t_{16}	t_{17}	t_{18}	t_{19}	t_{20}
5	10	17	32	32	33	34	36	54	55	55	58	58	61	64	65	65	66	67	68

La première étape est de tracer les données comme montré ci-dessous dans la Figure B.1. Noter que, bien que l'adéquation MRR et MLE implique une vraisemblance acceptable, le tracé montre le mélange Bi-Weibull classique de deux modes de défaillance, pente douce suivie de pente forte. L'analyse de distribution utilisant l'essai de rapport de vraisemblance favorise la distribution de Weibull à trois paramètres. L'analyse du mélange basée sur la vraisemblance confirme au moins la présence de deux modes de défaillance. Ceci illustre le mérite de toujours tracer les données, sans se baser entièrement sur les méthodes analytiques.

L'application des procédures numériques décrites dans la présente norme donne les résultats suivants:

Un test d'adéquation, avec un taux d'erreur de 10 %, ne peut pas exclure l'hypothèse que ces informations suivent une distribution de Weibull puisque H = 0,36 et $F_{0,1}$ (18; 20) = 1,81. Le coefficient MRR de détermination est 93,9 %, soit au-dessus de la valeur critique de 90% de 90,3 %. Les deux essais suggèrent une adéquation mais pas remarquable.

Les valeurs MLE/MRR pour β et η sont $\hat{\beta}$ = 2,091/1,423 et $\hat{\eta}$ = 84/113.

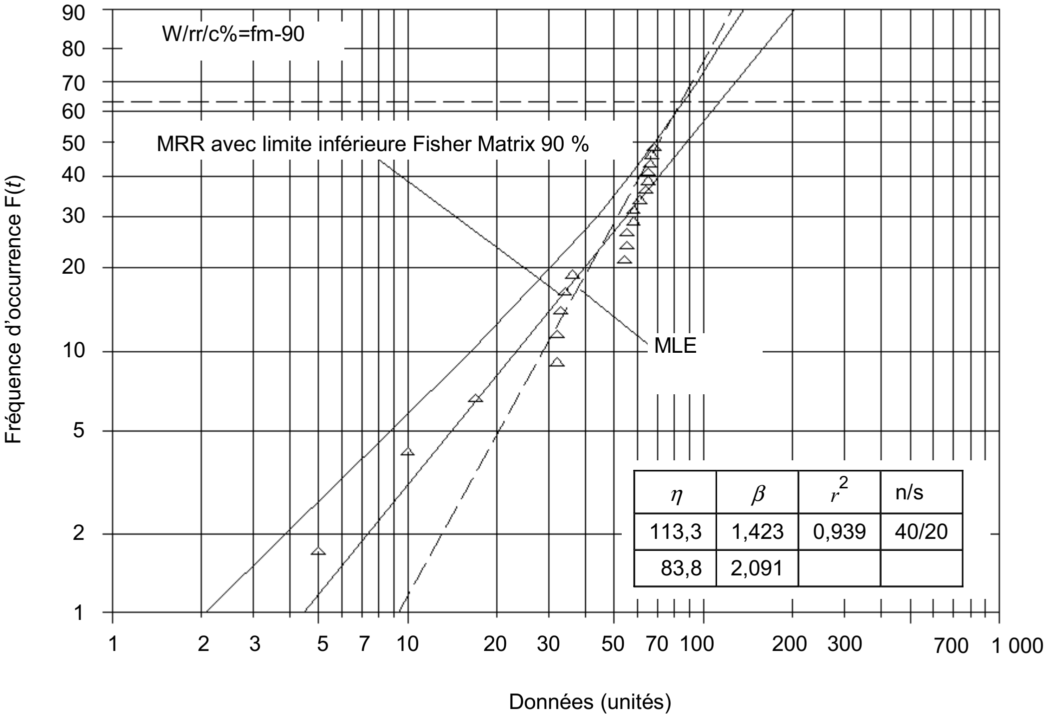
Les intervalles de confiance MLE/MRR à 90 % sont: [1,34/0,998; 2,742/2,029] pour β et [70/79,05; 108/162,4] pour η.

Le MLE/MRR de B_{10} est 28,63/28,56 et la limite inférieure de l'intervalle de confiance à 90 % de B_{10} est 20,43/23,29 (voir Figure B.1). Noter que, comme attendu, β issu de la MLE est plus raide que celui issu de la MRR et les durées de vie B MLE sont optimistes comparées à la MRR, même au niveau B10. A des niveaux comme B1, ils sont beaucoup plus optimistes comme montré au tableau B.2. Noter que t=5,0 est approximativement B1.

Les valeurs MLE pour la fiabilité et leurs limites inférieures de l'intervalle de confiance à 90 % pour trois valeurs arbitraires de t sont:

Tableau B.2 – Synthèse des résultats

t	$\hat{R}(t)$	$R0{,}9\vert_{\text{limite inférieu}}$
5,0	99,7/98,8	98,5/96,8
50,00	0,71	0,62
100,00	0,23	0,12



IEC 1334/08

Figure B.1 – Tracé des calculs

Annexe C
(informative)

Tableaux des rangs médians

C.1 Tableau des rangs médians (5 %)

Ordre de rang	Rangs 5 % Taille d'échantillon									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5,0	2,53	1,70	1,27	1,02	0,85	0,73	0,64	0,57	0,51
2		22,36	13,54	9,76	7,64	6,28	5,34	4,64	4,10	3,68
3			36,84	24,86	18,93	15,32	12,88	11,11	9,77	8,73
4				47,29	34,26	27,13	22,53	19,29	16,88	15,00
5					54,93	41,82	34,13	28,92	25,14	22,24
6						60,70	47,93	40,03	34,49	30,35
7							65,18	52,93	45,04	39,34
8								68,77	57,09	49,31
9									71,69	60,58
10										74,11

Ordre de rang	Rangs 5 % Taille d'échantillon									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,47	0,43	0,39	0,37	0,34	0,32	0,30	0,28	0,27	0,26
2	3,33	3,05	2,81	2,60	2,42	2,27	2,13	2,01	1,90	1,81
3	7,88	7,19	6,60	6,11	5,68	5,31	4,99	4,70	4,45	4,22
4	13,51	12,29	11,27	10,40	9,67	9,03	8,46	7,97	7,53	7,14
5	19,96	18,10	16,57	15,27	14,17	13,21	12,38	11,64	10,99	10,41
6	27,12	24,53	22,40	20,61	19,09	17,78	16,64	15,63	14,75	13,96
7	34,98	31,52	28,70	26,36	24,37	22,67	21,19	19,90	18,75	17,73
8	43,56	39,09	35,48	32,50	30,00	27,86	26,01	24,40	22,97	21,71
9	52,99	47,27	42,74	39,04	35,96	33,34	31,08	29,12	27,39	25,87
10	63,56	56,19	50,54	46,00	42,26	39,10	36,40	34,06	32,01	30,20
11	76,16	66,13	58,99	53,43	48,92	45,17	41,97	39,22	36,81	34,69
12		77,91	68,37	61,46	56,02	51,56	47,81	44,60	41,81	39,36
13			79,42	70,33	63,66	58,34	53,95	50,22	47,00	44,20
14				80,74	72,06	65,62	60,44	56,11	52,42	49,22
15					81,90	73,60	67,38	62,33	58,09	54,44
16						82,93	74,99	68,97	64,06	59,90
17							83,84	76,23	70,42	65,63
18								84,67	77,36	71,74
19									85,41	78,39
20										86,09

Ordre de rang	Rangs 5 % Taille d'échantillon									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0,24	0,23	0,22	0,21	0,20	0,20	0,19	0,18	0,18	0,17
2	1,72	1,64	1,57	1,50	1,44	1,38	1,33	1,28	1,24	1,20
3	4,01	3,82	3,65	3,50	3,35	3,22	3,10	2,98	2,88	2,78
4	6,78	6,46	6,17	5,90	5,66	5,43	5,22	5,03	4,85	4,69
5	9,88	9,41	8,98	8,59	8,23	7,90	7,59	7,31	7,05	6,81
6	13,24	12,60	12,02	11,49	11,01	10,56	10,15	9,77	9,42	9,09
7	16,82	15,99	15,25	14,57	13,95	13,38	12,85	12,37	11,92	11,50
8	20,57	19,56	18,63	17,80	17,03	16,33	15,68	15,09	14,53	14,02
9	24,50	23,27	22,16	21,16	20,24	19,40	18,62	17,91	17,25	16,63
10	28,58	27,13	25,82	24,64	23,56	22,57	21,66	20,82	20,05	19,33
11	32,81	31,13	29,61	28,24	26,99	25,84	24,79	23,83	22,93	22,11
12	37,19	35,25	33,51	31,94	30,51	29,21	28,01	26,91	25,89	24,95
13	41,72	39,52	37,54	35,76	34,14	32,66	31,31	30,07	28,93	27,87
14	46,41	43,91	41,68	39,68	37,86	36,21	34,70	33,31	32,03	30,85
15	51,26	48,45	45,95	43,71	41,68	39,84	38,16	36,62	35,20	33,89
16	56,30	53,15	50,36	47,86	45,61	43,57	41,71	40,00	38,44	36,99
17	61,56	58,02	54,90	52,13	49,64	47,38	45,34	43,46	41,75	40,16
18	67,08	63,09	59,61	56,53	53,78	51,30	49,05	47,00	45,12	43,39
19	72,94	68,41	64,51	61,09	58,05	55,32	52,86	50,62	48,57	46,69
20	79,33	74,05	69,64	65,82	62,46	59,46	56,77	54,33	52,10	50,06
21	86,71	80,19	75,08	70,77	67,04	63,74	60,79	58,13	55,71	53,49
22		87,27	80,98	76,02	71,83	68,18	64,94	62,03	59,40	57,01
23			87,79	81,71	76,90	72,81	69,24	66,06	63,20	60,61
24				88,27	82,39	77,71	73,73	70,23	67,11	64,30
25					88,71	83,02	78,47	74,58	71,16	68,10
26						89,12	83,60	79,18	75,39	72,04
27							89,50	84,15	79,84	76,14
28								89,85	84,66	80,47
29									90,19	85,14
30										90,50

C.2 Tableaux de rangs médians (95 %)

Ordre de rang	Rangs 95 % Taille d'échantillon									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	95,00	77,64	63,16	52,71	45,07	39,30	34,82	31,23	28,31	25,89
2		97,47	86,46	75,14	65,74	58,18	52,07	47,07	42,91	39,42
3			98,30	90,24	81,07	72,87	65,87	59,97	54,96	50,69
4				98,73	92,36	84,68	77,47	71,08	65,51	60,66
5					98,98	93,72	87,12	80,71	74,86	69,65
6						99,15	94,66	88,89	83,12	77,76
7							99,27	95,36	90,23	85,00
8								99,36	95,90	91,27
9									99,43	96,32
10										99,49

Ordre de rang	Rangs 95 % Taille d'échantillon									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	23,84	22,09	20,58	19,26	18,10	17,07	16,16	15,33	14,59	13,91
2	36,44	33,87	31,63	29,67	27,94	26,40	25,01	23,77	22,64	21,61
3	47,01	43,81	41,01	38,54	36,34	34,38	32,62	31,03	29,58	28,26
4	56,44	52,73	49,46	46,57	43,98	41,66	39,56	37,67	35,94	34,37
5	65,02	60,91	57,26	54,00	51,08	48,44	46,05	43,89	41,91	40,10
6	72,88	68,48	64,52	60,96	57,74	54,83	52,19	49,78	47,58	45,56
7	80,04	75,47	71,30	67,50	64,04	60,90	58,03	55,40	53,00	50,78
8	86,49	81,90	77,60	73,64	70,00	66,66	63,60	60,78	58,19	55,80
9	92,12	87,71	83,43	79,39	75,63	72,14	68,92	65,94	63,19	60,64
10	96,67	92,81	88,73	84,73	80,91	77,33	73,99	70,88	67,99	65,31
11	99,53	96,95	93,40	89,60	85,83	82,22	78,81	75,60	72,61	69,80
12		99,57	97,19	93,89	90,33	86,79	83,36	80,10	77,03	74,13
13			99,61	97,40	94,32	90,97	87,62	84,37	81,25	78,29
14				99,63	97,58	94,69	91,54	88,36	85,25	82,27
15					99,66	97,73	95,01	92,03	89,01	86,04
16						99,68	97,87	95,30	92,47	89,59
17							99,70	97,99	95,55	92,86
18								99,72	98,10	95,78
19									99,73	98,19
20										99,74

Ordre de rang	Rangs 95 % Taille d'échantillon									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	13,29	12,73	12,21	11,73	11,29	10,88	10,50	10,15	9,81	9,50
2	20,67	19,81	19,02	18,29	17,61	16,98	16,40	15,85	15,34	14,86
3	27,06	25,95	24,92	23,98	23,10	22,29	21,53	20,82	20,16	19,53
4	32,92	31,59	30,36	29,23	28,17	27,19	26,27	25,42	24,61	23,86
5	38,44	36,91	35,49	34,18	32,96	31,82	30,76	29,77	28,84	27,96
6	43,70	41,98	40,39	38,91	37,54	36,26	35,06	33,94	32,89	31,90
7	48,74	46,85	45,10	43,47	41,95	40,54	39,21	37,97	36,80	35,70
8	53,59	51,55	49,64	47,87	46,22	44,68	43,23	41,87	40,60	39,39
9	58,28	56,09	54,05	52,14	50,36	48,70	47,14	45,67	44,29	42,99
10	62,81	60,48	58,32	56,29	54,39	52,62	50,95	49,38	47,90	46,51
11	67,19	64,75	62,46	60,32	58,32	56,43	54,66	53,00	51,43	49,94
12	71,42	68,87	66,49	64,24	62,14	60,16	58,29	56,54	54,88	53,31
13	75,50	72,87	70,39	68,06	65,86	63,79	61,84	60,00	58,25	56,61
14	79,43	76,73	74,18	71,76	69,49	67,34	65,30	63,38	61,56	59,84
15	83,18	80,44	77,84	75,36	73,01	70,79	68,69	66,69	64,80	63,01
16	86,76	84,01	81,37	78,84	76,44	74,16	71,99	69,93	67,97	66,11
17	90,12	87,40	84,75	82,20	79,76	77,43	75,21	73,09	71,07	69,15
18	93,22	90,59	87,98	85,43	82,97	80,60	78,34	76,17	74,11	72,13
19	95,99	93,54	91,02	88,51	86,05	83,67	81,38	79,18	77,07	75,05
20	98,28	96,18	93,83	91,41	88,99	86,62	84,32	82,09	79,95	77,89
21	99,76	98,36	96,35	94,10	91,77	89,44	87,15	84,91	82,75	80,67
22		99,77	98,43	96,50	94,34	92,10	89,85	87,63	85,47	83,37
23			99,78	98,50	96,65	94,57	92,41	90,23	88,08	85,98
24				99,79	98,56	96,78	94,78	92,69	90,58	88,50
25					99,80	98,62	96,90	94,97	92,95	90,91
26						99,80	98,67	97,02	95,15	93,19
27							99,81	98,72	97,12	95,31
28								99,82	98,76	97,22
29									99,82	98,80
30										99,83

C.3 Tableaux de rangs médians (50 %)

Ordre de rang	Rangs médians (50 %) Taille d'échantillon									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	50	29,29	20,63	15,91	12,94	10,91	9,43	8,30	7,41	6,70
2		70,71	50,00	38,57	31,38	26,44	22,85	20,11	17,96	16,23
3			79,37	61,43	50,00	42,14	36,41	32,05	28,62	25,86
4				84,09	68,62	57,86	50,00	44,02	39,31	35,51
5					87,06	73,56	63,59	55,98	50,00	45,17
6						89,09	77,15	67,95	60,69	54,83
7							90,57	79,89	71,38	64,49
8								91,70	82,04	74,14
9									92,59	83,77
10										93,30

Ordre de rang	Rangs médians (50 %) Taille d'échantillon									
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	6,11	5,61	5,19	4,83	4,52	4,24	4,00	3,78	3,58	3,41
2	14,80	13,60	12,58	11,70	10,94	10,27	9,68	9,15	8,68	8,25
3	23,58	21,67	20,04	18,65	17,43	16,37	15,42	14,58	13,83	13,15
4	32,38	29,76	27,53	25,61	23,94	22,47	21,18	20,02	18,99	18,05
5	41,19	37,85	35,02	32,58	30,45	28,59	26,94	25,47	24,15	22,97
6	50,00	45,95	42,51	39,54	36,97	34,71	32,70	30,92	29,32	27,88
7	58,81	54,05	50,00	46,51	43,48	40,82	38,47	36,37	34,49	32,80
8	67,62	62,15	57,49	53,49	50,00	46,94	44,23	41,82	39,66	37,71
9	76,42	70,24	64,98	60,46	56,52	53,06	50,00	47,27	44,83	42,63
10	85,20	78,33	72,47	67,42	63,03	59,18	55,77	52,73	50,00	47,54
11	93,89	86,40	79,96	74,39	69,55	65,29	61,53	58,18	55,17	52,46
12		94,39	87,42	81,35	76,06	71,41	67,30	63,63	60,34	57,37
13			94,81	88,30	82,57	77,53	73,06	69,08	65,51	62,29
14				95,17	89,06	83,63	78,82	74,53	70,68	67,20
15					95,48	89,73	84,58	79,98	75,85	72,12
16						95,76	90,32	85,42	81,01	77,03
17							96,00	90,85	86,17	81,95
18								96,22	91,32	86,85
19									96,42	91,75
20										96,59

	Rangs médians (50 %) Echantillon de taille									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	3,25	3,10	2,97	2,85	2,73	2,63	2,53	2,45	2,36	2,28
2	7,86	7,51	7,19	6,90	6,62	6,37	6,14	5,92	5,72	5,53
3	12,53	11,97	11,46	10,99	10,55	10,15	9,78	9,44	9,11	8,81
4	17,21	16,44	15,73	15,09	14,49	13,94	13,43	12,96	12,52	12,10
5	21,89	20,91	20,01	19,19	18,43	17,74	17,09	16,48	15,92	15,40
6	26,57	25,38	24,30	23,30	22,38	21,53	20,74	20,01	19,33	18,69
7	31,26	29,86	28,58	27,41	26,32	25,32	24,40	23,54	22,74	21,99
8	35,94	34,33	32,86	31,51	30,27	29,12	28,06	27,07	26,14	25,28
9	40,63	38,81	37,15	35,62	34,22	32,92	31,71	30,59	29,55	28,58
10	45,31	43,29	41,43	39,73	38,16	36,71	35,37	34,12	32,96	31,87
11	50,00	47,76	45,72	43,84	42,11	40,51	39,03	37,65	36,37	35,17
12	54,69	52,24	50,00	47,95	46,05	44,31	42,68	41,18	39,77	38,46
13	59,37	56,71	54,28	52,05	50,00	48,10	46,34	44,71	43,18	41,76
14	64,06	61,19	58,57	56,16	53,95	51,90	50,00	48,24	46,59	45,06
15	68,74	65,67	62,85	60,27	57,89	55,69	53,66	51,76	50,00	48,35
16	73,43	70,14	67,14	64,38	61,84	59,49	57,32	55,29	53,41	51,65
17	78,11	74,62	71,42	68,49	65,78	63,29	60,97	58,82	56,82	54,94
18	82,79	79,09	75,70	72,59	69,73	67,08	64,63	62,35	60,23	58,24
19	87,47	83,56	79,99	76,70	73,68	70,88	68,29	65,88	63,63	61,54
20	92,14	88,03	84,27	80,81	77,62	74,68	71,94	69,41	67,04	64,83
21	96,75	92,49	88,54	84,91	81,57	78,47	75,60	72,93	70,45	68,13
22		96,90	92,81	89,01	85,51	82,26	79,26	76,46	73,86	71,42
23			97,03	93,10	89,45	86,06	82,91	79,99	77,26	74,72
24				97,15	93,38	89,85	86,57	83,52	80,67	78,01
25					97,27	93,63	90,22	87,04	84,08	81,31
26						97,37	93,86	90,56	87,48	84,60
27							97,47	94,08	90,89	87,90
28								97,55	94,28	91,19
29									97,64	94,47
30										97,72

C.4 Générer des rangs en utilisant un programme de tableur

Les rangs peuvent être générés avec un programme de tableur en utilisant la fonction suivante:

BETAINV(C, J, N-J+1)

où

C est le niveau de confiance;

J est l'ordre du rang;

N est la taille de l'échantillon.

Annexe D
(normative)

Tableaux statistiques

D.1 Table de fonction gamma

Le Tableau D.1 est utilisé conjointement avec 9.7.

Tableau D.1 – Valeurs de la fonction gamma

β	$\Gamma(1+1/\beta)$	β	$\Gamma(1+1/\beta)$	β	$\Gamma(1+1/\beta)$
0,20	120	1,50	0,902 7	3,60	0,901 1
0,25	24	1,55	0,899 4	3,70	0,902 4
0,30	9,260 3	1,60	0,896 6	3,80	0,903 8
0,35	5,029 5	1,65	0,894 2	3,90	0,905 1
0,40	3,323 3	1,70	0,892 2	4,00	0,906 4
0,45	2,505 5	1,75	0,890 6	4,10	0,907 6
0,50	2,000 0	1,80	0,889 2	4,20	0,908 9
0,55	1,702 4	1,85	0,888 2	4,30	0,910 1
0,60	1,504 5	1,90	0,887 4	4,40	0,911 3
0,65	1,3603	1,95	0,886 7	4,50	0,912 5
0,70	1,265 7	2,00	0,886 2	4,60	0,913 7
0,75	1,190 6	2,10	0,885 7	4,70	0,914 9
0,80	1,133 0	2,20	0,885 6	4,80	0,916 0
0,85	1,0878	2,30	0,885 9	4,90	0,917 1
0,90	1,052 2	2,40	0,886 5	5,00	0,918 2
0,95	1,023 8	2,50	0,887 2	5,20	0,920 2
1,00	1,000 0	2,60	0,888 2	5,40	0,922 2
1,05	0,980 8	2,70	0,889 3	5,60	0,924 1
1,10	0,964 9	2,80	0,890 3	5,80	0,926 0
1,15	0,951 7	2,90	0,891 7	6,00	0,927 7
1,20	0,940 6	3,00	0,893 0	6,20	0,929 3
1,25	0,931 4	3,10	0,894 3	6,40	0,930 9
1,30	0,923 6	3,20	0,895 6	6,60	0,932 5
1,35	0,916 9	3,30	0,897 0	6,80	0,934 0
1,40	0,911 4	3,40	0,898 4	7,00	0,935 4
1,45	0,906 7	3,50	0,899 7	8,00	0,941 7

D.2 Fractiles de distribution normale

Le tableau D.2 donne les fractiles de la distribution normale u_p pour les valeurs usuelles de l'argument p.

Tableau D.2 – Fractiles de la loi de distribution normale

p	0,010	0,025	0,050	0,100
u_p	2,326 3	1,960 0	1,644 9	1,281 6

Annexe E
(informative)

Exemple de tableur

E.1 Exemple d'analyse de Weibull utilisant un tableur

Tableau E.1 – Exemple d'analyse pratique

	A	B	C	D	E
1	**Défaillance N°.** i	**Temps défaillance** t_i	**Rang médian** $F_i(t)$ **=** **(**i **- 0,3)/(**n **+ 0,4)**	X **=ln**(t)	Y **=ln**$(1/\ln(1-F(t)))$
2	1	12	0,067 3	2,484 9	-2,663 8
3	2	20	0,163 5	2,995 7	-1,723 3
4	3	34	0,259 6	3,526 4	-1,202 0
5	4	65	0,355 8	4,174 4	-0,821 7
6	5	91	0,451 9	4,510 9	-0,508 6
7	6	134	0,548 1	4,897 8	-0,230 4
8	7	178	0,644 2	5,181 8	0,032 9
9	8	246	0,740 4	5,505 3	0,299 0
10	9	378	0,836 5	5,934 9	0,594 0
11	10	512	0,932 7	6,238 3	0,992 7
12	Régresser X sur Y, puisqu'il y a plus d'incertitude en t			Méthode alternative, s'il y a plus d'incertitude en Y	
13	y = 1,111 5 x + 5,126 5			y = 0,8839x - 4,5403	
14	R^2 = 0,982 4			R^2 = 0,9824	
15	Intercept	5,126 5		intercept	-4,540 3
16	β	0,899 7		β	0,883 9
17	η	168,4 2		η	170,15
18					

Méthode	Équation	Modèle tableur	β	η
X sur Y (Standard)	$(1/\beta)\ \ln(-\ln(1-F)) + \ln(\eta)=\ln(t)$	y = 1,111 5 x - 5,126 5	= 1/1,115 = 0,899 7	=exp(5,1265) =168,42
Y sur X (Special)	$\ln(-\ln(1-F)) = \beta\ln(t) - \beta\ln(\eta)$	y = 0,883 9 x - 4,540 3	= 0,883 9	=exp(4,5403/0,8839) = 170,15

Les cellules ombrées dans le Tableau E.1 sont choisies pour un tracé. Le type de tracé est dispersé, sans courbe. Une fois le graphique dispersé fini, les données sont adaptées par une droite de régression, et il convient que cette sélection spécifie l'équation de la courbe adaptée pour être affichée sur le graphique avec le coefficient de corrélation, valeur, R^2.Le tracé obtenu est montré Figure E.1. Il est pratique de copier l'équation à partir du tracé sur la feuille de donnée pour le calcul du paramètre d'échelle, comme montré en bas du Tableau E.1. La fonction LINEST dans un modèle tableur peut être utilisée pour calculer l'adéquation.

En général, il y a plus d'incertitude avec le temps avant défaillance, t, et moins d'incertitude avec le nombre de défaillance. La régression selon la méthode des moindres carrées doit régresser la variable avec moins d'incertitude. Logiciel du commerce régressera X sur Y au lieu de l'habituel Y sur X utilisé dans les tracés de tableur. Les rangs en bas du Tableau E.1 montrent la comparaison entre les deux méthodes.

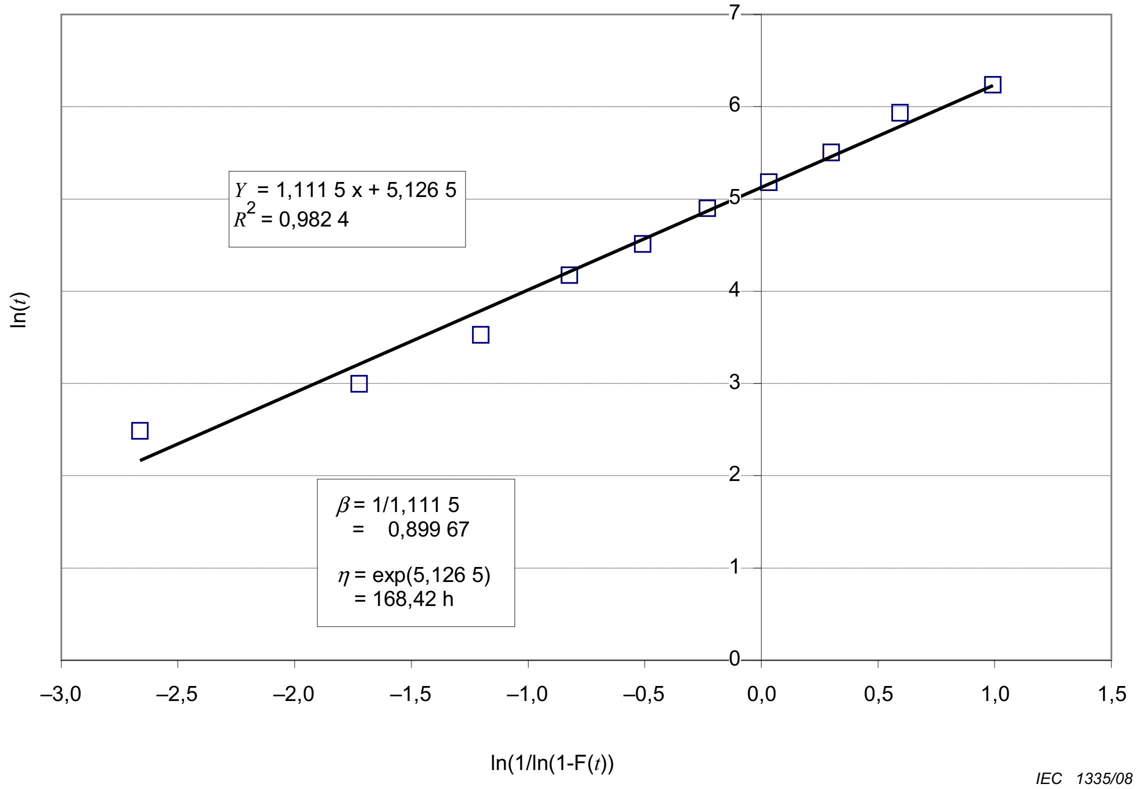


Figure E.1 – Tracé de Weibull par analyse graphique

La pente de la courbe dans le tracé définit le paramètre de forme, β, et le paramètre d'échelle, η. Ceux-ci sont calculés comme montré au Tableau E.1.

E.2 Exemple utilisant les données suspendues

Les données censurées ou suspendues, plus particulièrement lorsqu'elles sont grandes, peuvent être analysées par un tableur sur ordinateur, presque de la même façon que montré dans la section précédente pour l'analyse de Weibull du tableur. La différence est que le nombre d'ordre qui est utilisé pour le calcul du rang médian, précédemment désigné par *i*, est modifié pour rendre compte des suspensions en utilisant les expressions suivantes:

$$i_{t_i} = i_{t_{i-1}} + m_{t_i}$$

$$m_{t_i} = \frac{(n+1) - i_{t_{i-1}}}{1 + (n - \text{nombre d'entités précédentes})}$$

$$F_i(t_i) = \frac{i_{t_i} - 0{,}3}{n + 0{,}4}$$

La relation entre les deux équations ci-dessus $i_{t_i} = i_{t_{i-1}} + m_{t_i}$ et m_{t_i} sont déduites de l'Équation (7) de 7.2.3

Les Tableaux E.2 et E.3 ci-dessous montrent comment un tableur doit être réglé pour un ensemble de données.

Tableau E.2 – Tableau établi pour l'analyse des données censurées

	A	B	C	D	E	F	G
1	**N°. d'événe-ment** j	**N° défaillance ajustée** i	**Durée evène-ment** t_i	**Evéne-ment**	**Rang ajusté** $F_i(t)$ **(**i **- 0,3)/(**n **+ 0,4)**	x	y
2	1	=A2	t_1	F	=(B2-0,3)/($A12+0,4)	ln(C2)	ln{ln[1/(1-E2]}
3	2		t_2	S			
4	3		t_3	S			
5	4	=B2+((A12+1)-B2)/(1+(A12-A4))	t_4	F	=(B5-0,3)/($A12+0,4)	ln(C5)	ln{ln[1/(1-E5]}
6	5	=B5+((A12+1)-B5)/(1+(A12-A5)	t_5	F	=(B6-0,3)/($A12+0,4)	ln(C6)	ln{ln[1/(1-E6]}
7	6		t_6	S	,		
8	7	=B6+((A12+1)-B6)/(1+(A12-A7))	t_7	F	=(B8-0,3)/($A12+0,4)	ln(C8)	ln{ln[1/(1-E8]}
9	8		t_8	S			
10	9	=B8+((A12+1)-B8)/(1+(A12-A9))	t_9	F	=(B10-0,3)/($A12+0,4)	ln(C10)	ln{ln[1/(1-E10]}
11	10	=B10+((A12+1)-B10)/(1+(A12-A10))	t_{10}	F	=(A11-0,3)/($A12+0,4)	ln(C11)	ln{ln[1/(1-E11]}
12	11		t_{11}	S			

Tableau E.3 – Exemple d'analyse de Weibull pour les données suspendues

	A	B	C	D	E	F	G
1	**N°. d'événe-ment** j	**N° défaillance** i	**Temps de défaillance** t_i	**Evéne-ment**	**Rang médian, F**$_i$**(**t**)** **(**i **- 0,3)/(**n **+ 0,4)**	x	y
2	1	1,000 0	12	F	0,061 4	2,484 9	-2,758 8
3	2		20	S			
4	3		34	S			
5	4	2,222 2	65	F	0,168 6	4,174 4	-1,689 2
6	5	3,444 4	91	F	0,275 8	4,510 9	-1,130 9
7	6		134	S			
8	7	4,870 4	178	F	0,400 9	5,181 8	-0,668 8
9	8		246	S			
10	9	6,652 8	378	F	0,557 3	5,934 9	-0,204 8
11	10	8,435 2	450	F	0,713 6	6,109 2	0,223 5
12	11		512	S			
13							
14		y = 1,230 5x + 6,010 2					
15		R^2 = 0,983 3					
16		Intercept	6,010 2				
17		β	0,812 7		= 1/1,230 5		
18		η	407,55		= exp(6,010 2)		
19							

Le tracé de Weibull de l'exemple ci-dessus se trouve à la Figure E.2.

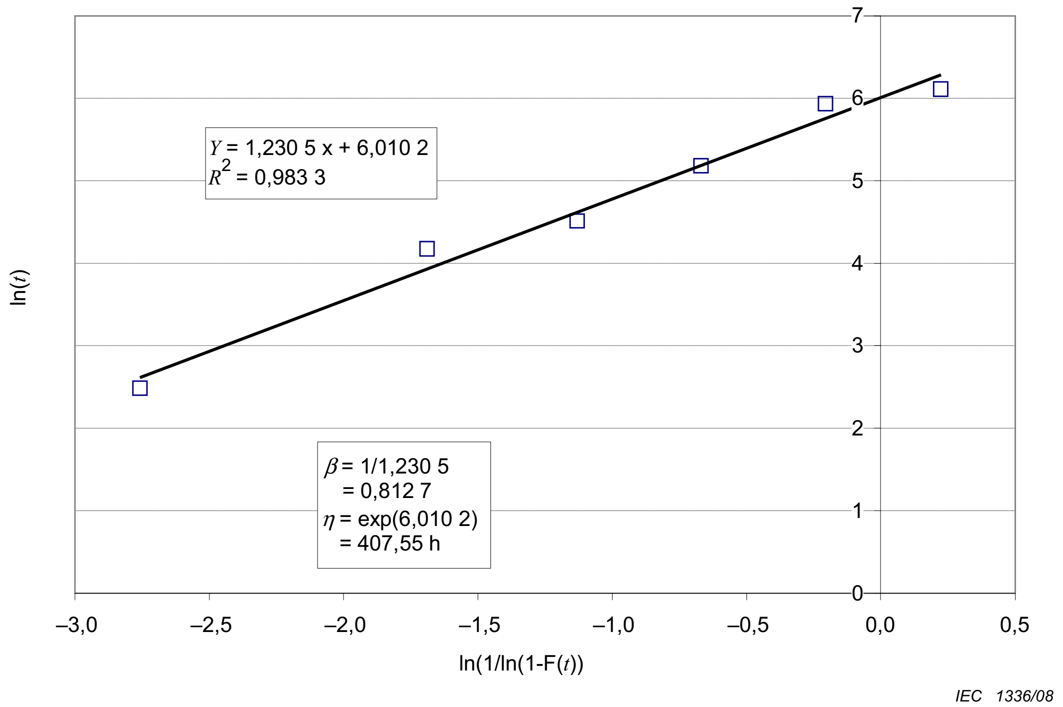


Figure E.2 – Tracé de Weibull des données censurées

E.3 Exemple 1 du traçage de risque

Une autre façon d'analyser les données avec les suspensions est de tracer la fonction de risque cumulée. Les points tracés correspondent aux temps avant défaillance, mais le calcul du risque cumulé compte pour les suspensions. Cette méthode est considérablement plus simple que l'ajustement des nombres de défaillances, tout en produisant des résultats comparables. La CEI 61810-1 décrit comment tracer le risque.

Le tableur avec le traçage de risque pour représenter les suspensions est montré dans les Tableaux E.4 et E.5.

Tableau E.4 – Exemple d'application du tableur pour les données censurées

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**N°. d'événement** i	**Temps d'evènement** t_i	**Evénement**	**Rang inversé**	**Fonction de risque, h(t)**	**Risque cumulé H(t)**	**ln(t)**	**ln(H(t))**	**F(t)**
2	1	t_1	Défaillant	11	=1/D2	=E2	=LN(B2)	=LN(F2)	=1-EXP(-F2)
3	2	t_2	Censuré	10					
4	3	t_3	Censuré	9					
5	4	t_4	Défaillant	8	=1/D5	=F2+E5	=LN(B5)	=LN(F5)	=1-EXP(-F5)
6	5	t_5	Défaillant	7	=1/D6	=F5+E6	=LN(B6)	=LN(F6)	=1-EXP(-F6)
7	6	t_6	Censuré	6					
8	7	t_7	Défaillant	5	=1/D8	=F6+E8	=LN(B8)	=LN(F8)	=1-EXP(-F8)
9	8	t_8	Censuré	4					
10	9	t_9	Défaillant	3	=1/D10	=F8+E10	=LN(B10)	=LN(F10)	=1-EXP(-F10)
11	10	t_{10}	Défaillant	2	=1/D11	=F10+E11	=LN(B11)	=LN(F11)	=1-EXP(-F11)
12	11	t_{11}	Censuré	1					

Tableau E.5 – Exemple de feuille de calcul

Temps de fonctionnement avant défaillance *t*	Nombre	Evénement	Rang inverse	Fonction de risque h(*t*)	Risque cumulé H(*t*)	ln(*t*)	ln(H(*t*))	F(*t*)
12	1	Défaillant	11	0,091	0,091	2,485	-2,398	0,087
20	2	Censuré	10					
34	3	Censuré	9					
65	4	Défaillant	8	0,125	0,216	4,174	-1,533	0,194
91	5	Défaillant	7	0,143	0,359	4,511	-1,025	0,301
134	6	Censuré	6					
178	7	Défaillant	5	0,200	0,559	5,182	-0,582	0,428
246	8	Censuré	4					
378	9	Défaillant	3	0,333	0,892	5,935	-0,114	0,590
450	10	Défaillant	2	0,500	1,392	6,109	0,331	0,751
512	11	Censuré	1					

Tracer (LN est le logarithme naturel) LN le risque cumulé contre LN temps donné Figure E.3.

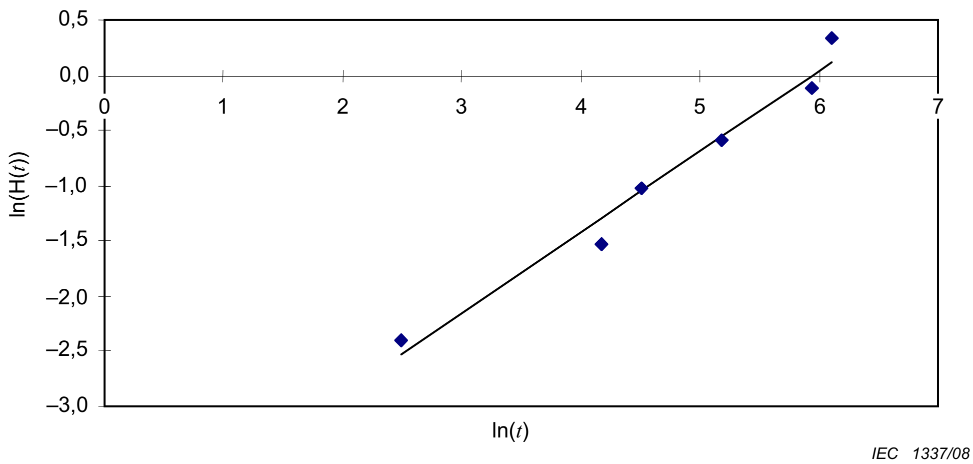


Figure E.3 – Tracé de risqué cumulée pour les données du Tableau E.4

De l'analyse de régression de ln[H(*t*)] sur ln(*t*), une ligne droite adaptée aux données est:

$$\ln[\mathrm{H}(t)] = 0{,}729 \ln(t) - 4{,}338$$

avec $R^2 = 0{,}973$. Les estimations de paramètres sont:

$\beta = 0{,}729$

et

$$\eta = \mathrm{e}^{\left(\frac{4,338}{0,729}\right)} = 384$$

E.4 Exemple 2 de traçage de risque

Les techniques de traçage de risque et celle décrite en 7.3 peuvent analyser les ensembles de données avec des modes de défaillance multiples, en traitant les modes de défaillance autres que ceux analysés, tels les modes de défaillance censurés. L'ensemble de données suivant, fourni par CEI/TC94, est le résultat des expériences de la fiabilité sur un relais. L'échelle de durée de vie est mesurée en nombre de commutations. Ce relais a deux modes de défaillance, soudure (mode 1) et érosion de contact (mode 2).

Le tableau E.6 montre l'ensemble de données établi suivant un exemple pour estimer la fonction de risque cumulée pour le mode de défaillance 1. Dans l'analyse des enregistrements de défaillance du mode 1, ceux de mode 2 sont traités comme censurés.

Tableau E.6 – Les données de relais fournies par ISO/TC94 et l'analyse de risque pour le mode de défaillance 1

Temps	Numéro	Evénement	Rang inversé	Fonction risque, h1(t)	Risque cumulé H1(t)	ln(t)	ln(H1(t))	F1(t)
984 182	1	Défaillant - mode 1	30	0,033	0,033	13,800	-3,401	0,033
103 598 9	2	Défaillant - mode 1	29	0,034	0,068	13,851	-2,691	0,066
108 632 0	3	Défaillant - mode 1	28	0,036	0,104	13,898	-2,268	0,098
116 708 2	4	Défaillant - mode 2	27					
116 843 7	5	Défaillant - mode 2	26					
119 624 3	6	Défaillant - mode 2	25					
119 895 4	7	Défaillant - mode 1	24	0,042	0,145	13,997	-1,930	0,135
123 715 8	8	Défaillant - mode 2	23					
126 636 3	9	Défaillant - mode 1	22	0,045	0,191	14,052	-1,657	0,174
128 005 4	10	Défaillant - mode 2	21					
129 248 1	11	Défaillant - mode 2	20					
130 758 8	12	Défaillant - mode 1	19	0,053	0,243	14,084	-1,414	0,216
130 857 5	13	Défaillant - mode 2	18					
134 196 6	14	Défaillant - mode 2	17					
136 270 8	15	Défaillant - mode 1	16	0,063	0,306	14,125	-1,185	0,263
142 846 6	16	Défaillant - mode 1	15	0,067	0,372	14,172	-0,988	0,311
143 192 3	17	Défaillant - mode 2	14					
143 327 1	18	Défaillant - mode 1	13	0,077	0,449	14,175	-0,800	0,362
145 822 6	19	Défaillant - mode 2	12					
146 155 9	20	Défaillant - mode 2	11					
152 838 6	21	Défaillant - mode 2	10					
156 312 3	22	Défaillant - mode 2	9					
162 708 2	23	Défaillant - mode 2	8					
205 187 7	24	Défaillant - mode 2	7					
224 022 4	25	Défaillant - mode 1	6	0,167	0,616	14,622	-0,484	0,460
231 958 5	26	Défaillant - mode 1	5	0,200	0,816	14,657	-0,203	0,558
247 604 7	27	Défaillant - mode 1	4	0,250	1,066	14,722	0,064	0,656
248 000 0	28	Censuré	3					
248 000 0	29	Censuré	2					
248 000 0	30	Censuré	1					

Une analyse similaire est réalisée sur le mode 2 de défaillance et les tracés résultants et les courbes correspondantes sont montrés à la Figure E.4.

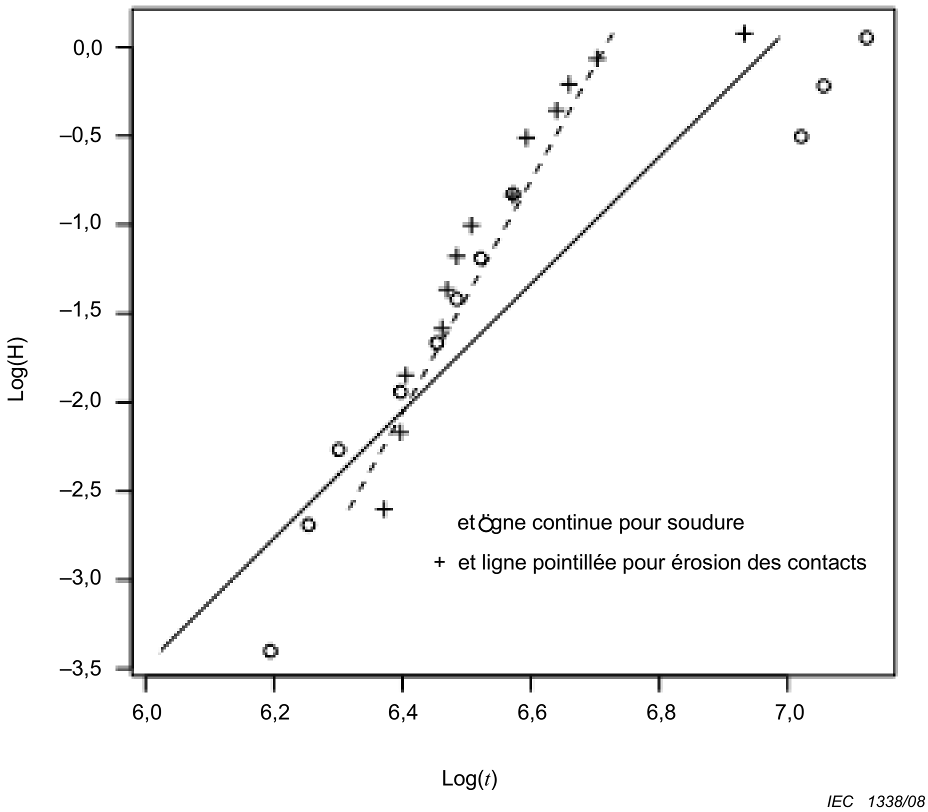


Figure E.4 – Tracés de risque cumulé pour le Tableau E.6

Les paramètres estimés sont $\beta_1 = 3{,}59$, $n_1 = 1066$, $\beta_2 = 6{,}53$ et $\eta = 825$, respectivement.

Annexe F
(informative)

Exemple de papier de probabilité de Weibull

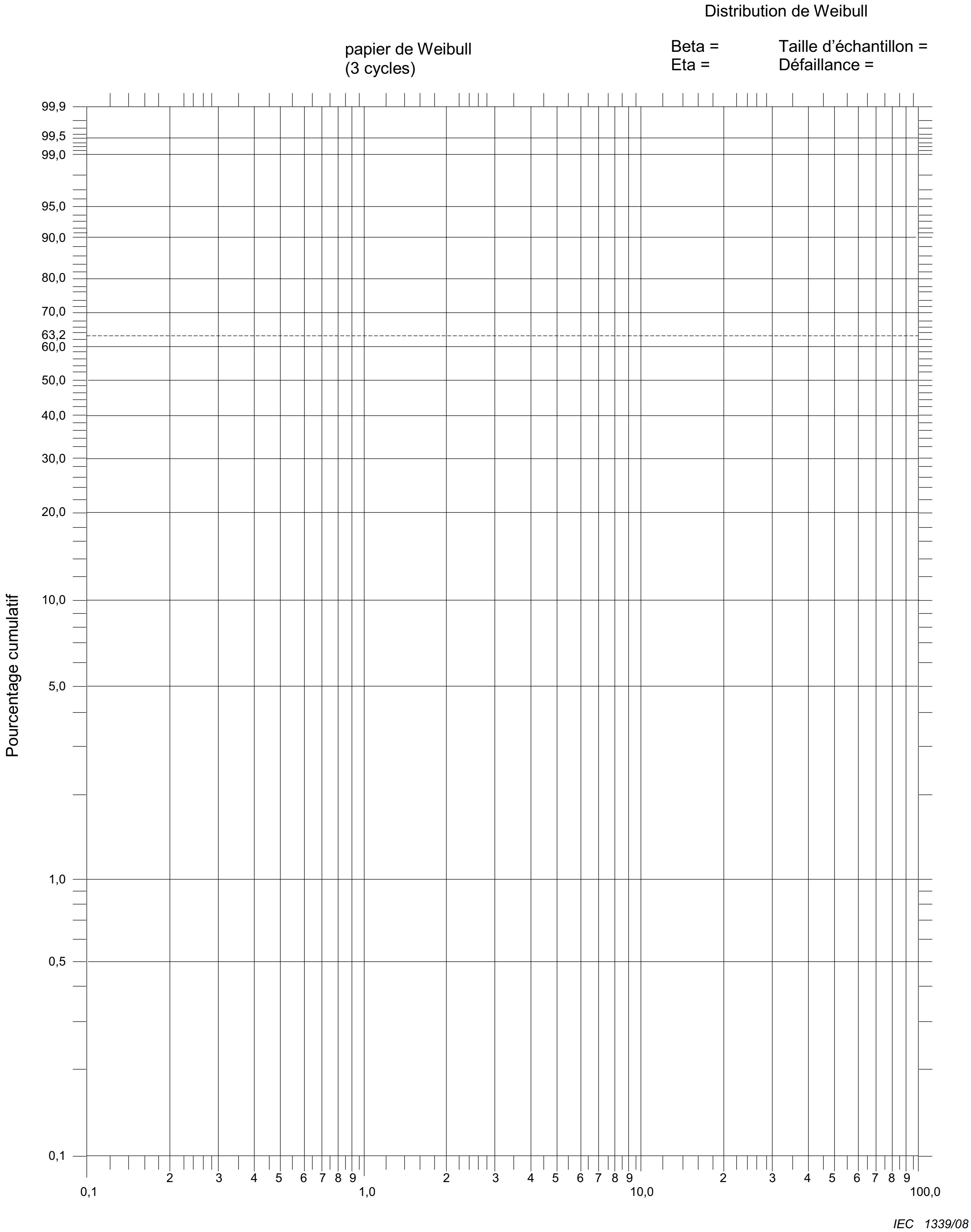


Figure F.1 – Papier de probabilité de Weibull

Annexe G
(informative)

Mélange de plusieurs modes de défaillance

G.1 Description

Un tracé de Weibull contenant une courbe décentrée est un indice de la potentialité de multiples modes de défaillance concurrents. C'était le cas pour un problème d'arrimage de système de purge pour démarrage de compresseur. Après examen des données, 10 sur 19 défaillances sont survenues sur une installation de base. On en a conclu que le positionnement de cette base contribuait au problème. Cette base était située sur l'océan et l'air salin était le facteur. Les données ont été catégorisées en des tracés de Weibull séparés en fonction de la connaissance des ingénieurs. La première courbe de Weibull avait une pente de 0,75. Ceci pouvait être considéré comme un problème de défaillance précoce, alors que la courbe de Weibull basée sur l'exploitation océanique montrait un mécanisme de défaillance d'usure dû à la corrosion sous contrainte avec β = 11,9. Une attention soutenue à la maintenance a résolu le problème.

Les courbes de Weibull à patte d'oie sont dues à des mélanges de plus d'un mode de défaillance. Elles résultent généralement de modes de défaillance concurrents. Cependant, il existe de nombreux types de mélanges qui sont décrits dans cette annexe. Par exemple, des défaillances de pompes à carburant peuvent être dues à des roulements, des fêlures dans l'enveloppe, des fuites, etc. Si ces différents modes de défaillance sont tracés sur un tracé Weibull, le tracé montrera un ou plusieurs coudes en patte d'oie. Si cela se produit, un examen physique des pièces défaillantes est le meilleur moyen de séparer les données en différents modes de défaillance. Si ceci est fait correctement, il en résultera des courbes de Weibull séparées correctes. Il peut y avoir des mélanges de modes et de populations, peut-être des discontinuités et des modes de défaillances concurrents. Une pente abrupte suivie d'une pente faible indique généralement un problème de discontinuité, il existe des «survivants perpétuels» qui ne sont pas sujets au mode de défaillance. Par exemple, il peut y avoir des défauts dans certaines pièces, mais pas dans tout, un problème de discontinuité.

Il est toujours préférable de séparer les modes de défaillance en se fondant sur l'analyse des pièces (et de l'environnement) et de les analyser séparément, plutôt que de s'en remettre à des méthodes statistiques.

Supposons qu'il existe un ensemble de données portant sur 50 pièces, et que 20 de celles-ci ont un mode de défaillance et les 30 autres un mode de défaillance différent. Il convient d'analyser le premier ensemble comme 20 défaillances (de F_1) et 30 suspensions (pour F_2). Le second ensemble serait de 30 défaillances (de F_2) et 20 suspensions (pour F_1). Ces deux ensembles de paramètres peuvent alors être utilisés pour prédire la distribution de défaillance cumulée.

Lorsque les pièces ne sont pas disponibles pour une analyse physique, les données peuvent être séparées en groupes basés sur la position du tracé. Ceci peut provoquer des erreurs, parce que de faibles pourcentages de défaillances d'usure surviendront avant un pourcentage de défaillances précoces survenant plus tard.

Un minimum de 20 défaillances est nécessaire pour des résultats crédibles issus d'un mélange de deux modes de défaillance et 50 défaillances ou plus pour les autres mélanges.

Ci-après de brèves descriptions des méthodes les plus communes pour le traitement de mélanges.

– p indique la portion ou la discontinuité de la population totale qui a une distribution de défaillance particulière (F_1 dans le mélange simple);

– F_1, F_2 et F_3 indiquent les distributions de défaillance;

– R_1, R_2 et R_3 sont les distributions de fiabilité correspondantes.

Les distributions cumulées de défaillance sont F et R.

Les descriptions sont données sans décrire la forme de distribution particulière (par exemple Weibull log-normale, normale, ou exponentielle). Une forme de distribution appropriée nécessite d'être substituée à chaque F_n.

G.2 Risques concurrents

$$F = 1 - (1 - F_1)(1 - F_2) \qquad \text{(G.1)}$$

Le risque concurrent survient lorsqu'une population possède deux modes de défaillance ou plus et la population entière courre un risque par rapport à l'un ou l'autre mode de défaillance. Bien qu'un tracé de Weibull de ces données apparaisse incurvé, ceci n'est pas un mélange de sous-population ; c'est une population homogène. Si on définit un mélange comme mélange de modes de défaillance, alors le modèle sera lui-même un mélange, à partir du moment où il y a au moins deux modes de défaillance différents.

NOTE Ceci est simplement un problème de fiabilité en série: $R = R_1 \cdot R_2$.

Un exemple de risque concurrent est donné par un composant ASIC dans un enrobage plastique avec des connexions soudées du type micro-BGA. L'ASIC peut être défaillant du fait de la propagation d'une fêlure dans les boules de brasure ou par la pénétration d'humidité à travers le plastique. Les deux modes de défaillance sont indépendants l'un de l'autre, mais entrent en concurrence et provoquent la défaillance du ASIC.

G.3 Mélange simple

$$F = pF_1 + (1 - p)F_2 \qquad \text{(G.2)}$$

Ceci est un mélange de deux sous-populations indépendantes sans modes de défaillance communs. Chaque sous-population a ses propres modes de défaillance.

Bien que répertorié comme mélange simple, il existe très peu d'applications qui correspondent à ce modèle. La plupart des mélanges ont au moins un mode de défaillance commun. Le mélange simple peut être utilisé comme une approximation pour des distributions plus complexes, telles que le mélange de risques concurrents, décrit en Article G.4. Un exemple peut être les balles de brasure des BGA micros des ASIC. Certaines des balles de brasure ont une ou plusieurs cavités. Une fêlure se propagera jusqu'à la cavité réduisant significativement la durée de vie, en comparaison aux balles de brasure où la fêlure doit se propager à travers l'épaisseur totale de la brasure.

G.4 Mélange de risques concurrents

$$F = p[1 - (1 - F_1)(1 - F_2)] + (1 - p)F_2 \qquad \text{(G.3)}$$

La plupart des mélanges des sous populations sont des mélanges de risques concurrents. Il existe au moins un mode de défaillance (F_1) qui est unique pour une sous-population, et il existe un mode de défaillance (F_2) qui est commun aux deux sous-populations.

Dans ce cas, une sous-population est soumise aux modes de défaillance 1 et 2, tel qu'indiqué par la portion de l'équation entre crochets [ ]. Cette sous-population possède par elle-même un risque concurrent. Pour exemple, un pneu de voiture peut vibrer du fait d'un mauvais positionnement (F_1) mais il peut aussi avoir une crevaison. Dans les deux cas, les pneus sont dans les spécifications de forme et le pneu qui vibre peut subir une crevaison. Par conséquent, il est possible d'avoir une crevaison (F_2) en allant chez le fournisseur afin de faire remplacer le pneu qui vibre.

Des mélanges de plus de trois modes de défaillance auront une meilleure adéquation, les décentrages disparaîtront et β tendra vers un. Ainsi, les courbes de Weibull pour un système ou composant avec plusieurs modes mélangés tendront vers un β de 1. Il ne convient pas d'employer ces courbes de Weibull s'il existe un moyen de catégoriser ces données en des modes de défaillances séparés, mieux appropriés. Utiliser un tracé de Weibull avec des mélanges de plusieurs modes de défaillance est équivalent à faire l'hypothèse que la distribution exponentielle est applicable. Les résultats exponentiels portent souvent à confusion et ceci est déjà une pratique commune.

Annexe H
(informative)

Exemple de tracé de Weibull à trois paramètres

H.1 Exemple

La Figure H.1 est un exemple typique de distribution de Weibull à trois paramètres portant sur la résistance à la fracture d'un plateau en acier. Le modèle indique qu'il est impossible physiquement que le plateau soit défaillant à un niveau de contrainte faible (voir Figure H.2 pour l'effet du changement t_0). Il y a plusieurs raisons possibles à l'origine du décalage. Le fabricant peut avoir sollicité assez longtemps le système dans le cadre des essais d'acceptation de production, mais noté toutefois que les entités indiquent «temps zéro». Le but d'acceptation de production est d'éliminer les défaillances précoces. Les composants électroniques peuvent être soumis à des contraintes de déverminage ou environnementales pour les mêmes raisons. Dans ces cas, les entités ont vieilli avant d'être livrées comme systèmes neufs. Les pièces de rechange comme les caoutchoucs, les produits chimiques et les billes de roulement peuvent avoir vieilli lors de leur stockage et passé une partie de leur durée de vie sur étagère et nécessiter de ce fait un t_0 négatif. Pour les propriétés des matériaux, où en abscisse du tracé de Weibull est portée une contrainte ou une pression, il peut être impossible pour une fracture ou une faille ou d'autres défauts de produire une.

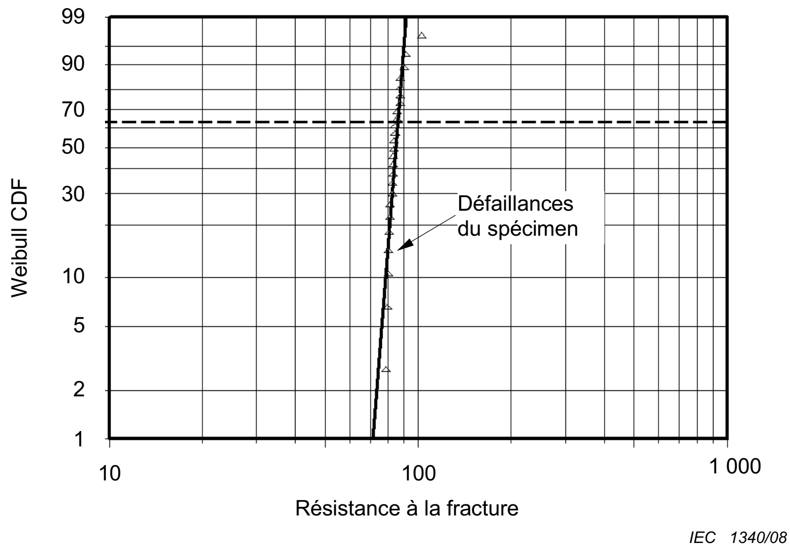


Figure H.1 – Résistance d'un acier à la rupture – Données incurvées

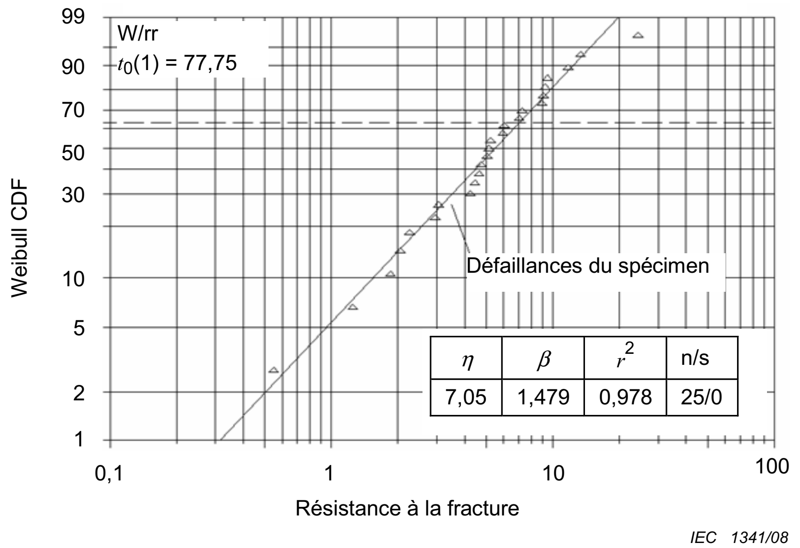


Figure H.2 – t_0 améliore l'adéquation des données de la Figure H.1

Pour ces raisons et d'autres, le tracé de Weibull peut être incurvé et nécessiter un changement d'origine, de zéro à t_0.

Trois paramètres, t_0, β et η, sont inclus dans la fonction de distribution cumulative de Weibull , comme montré dans l'Équation (H.1):

$$F(t) = 1 - e^{-((t - t_0)/\eta)^{\beta}} \tag{H.1}$$

où

t est le temps avant défaillance;

t_0 est le point de départ ou origine de la distribution.

Lorsque la correction t_0 est appliquée aux données, le tracé résultant suit une ligne droite si la correction est appropriée. La Figure H.2 montre les données de fracture de la Figure H.1 avec la correction t_0. A noter que l'échelle d'ordonnée du tracé de Weibull et la durée de vie caractéristique sont maintenant dans le domaine de t_0. Pour reconvertir en temps réel, ré-ajouter t_0.

Annexe I
(informative)

Réaliser un papier Weibull

I.1 Papier pour tracé de probabilité Weibull

Tous les papiers de probabilité ont des échelles qui transforment la fonction de distribution cumulée en une ligne droite. Si les données sont tracées sur l'échelle transformée et si elles sont conformes à une ligne droite, alors celle-ci supporte l'hypothèse que la distribution est appropriée.

Le papier pour tracé de Weibull peut être construit en utilisant la transformation telle que décrite dans les alinéas suivants.

La distribution de Weibull peut être définie mathématiquement comme le montre l'Équation (I.1):

$$\mathrm{F}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-(t/\eta)^{\beta}} \tag{I.1}$$

où F(*t*) définit la fraction cumulée des entités défaillantes par un temps *t*. La fraction des entités qui ne sont pas défaillantes jusqu'au temps *t* est 1 – F*(t)*.

Ceci peut être écrit comme (I.2):

$$\frac{1}{1-\mathrm{F}(t)} = \mathrm{e}^{(t/\eta)^{\beta}} \tag{I.2}$$

Appliquer deux fois les logarithmes naturels des deux côtés (log naturels et décimaux peuvent être utilisés) donne une équation de ligne droite, comme montré en (I.3) ci-dessous:

$$\ln\left[\ln\left[\frac{1}{1-\mathrm{F}(t)}\right]\right] = \beta\ln(t) - \beta\ln(n) \tag{I.3}$$

L'équation ci-dessus est une ligne droite de la forme $y = mx +$ c. Le papier de Weibull est construit en traçant la probabilité cumulée de défaillance utilisant une échelle inverse log-log par rapport à *t* porté sur une échelle log. La pente d'une ligne droite tracée de cette manière sera le paramètre de forme, *β,* comme montré en Équation (I.4).

$$y = \ln\left[\ln\left[)\frac{1}{1-\mathrm{F}(t)}\right]\right]$$

$$m = \beta \tag{I.4}$$

$$x = \ln(t)$$

$$c = -\beta \cdot \ln(\eta)$$

Le paramètre d'échelle est alors calculé à partir de l'intersection (intercept) (valeur de y pour x = ln(t) = 0, c'est-à-dire pour t = 1) montrée en Équation (I.5):

$$\eta = \mathrm{e}^{-\frac{\text{intercept}}{\beta}} \tag{I.5}$$

Tableau I.1 – Construction de l'ordonnée (Y)

F(t)	ln(ln(1/(1 - F(t)))	Valeur Col 2 + 6,91
0,001	–6,91	0 entités
0,010	–4,60	2,31
0,1	–2,25	4,66
0,5	–0,37	6,54
0,9	0,83	7,74
0,99	1,53	8,44
0,999	1,93	8,84

Tableau I.2 – Construction de l'abscisse (t)

t h	ln(t)
1	0
2	0,69
3	1,10
4	1,39
5	1,61
10	2,30
15	2,71
20	3,00
100	4,61
1 000	6,91

Le paramètre de Weibull β est estimé en mesurant la pente de la courbe sur le papier de Weibull.

La MRR (régression du rang médian) est la technique qui combine le rang médian comme position de tracé et la régression par les moindres carrés sur le papier Weibull comme critère d'adéquation.

I.2 Utilisation d'un tableur pour réaliser des tracés de Weibull

L'analyse de Weibull peut être effectuée en utilisant un logiciel de tableur commercial de façon similaire à la construction du papier de probabilité. Ici, le papier n'est pas préparé pour un tracé manuel, mais le graphe du tableur présente les données de façon appropriée pour la détermination des paramètres de Weibull en utilisant une régression linéaire.

Tableau I.3 – Données entrées dans le tableur

N° défaillance i	Temps avant défaillance t_i	Rang médian $F_i(t)$ $(i - 0{,}3)/(n+0{,}4)$	x_i	y_i
1	t_1	$(1-0{,}3)/(n+0{,}4)$	$\ln(t_1)$	$\ln\{\ln[1/(1-F_1(t)]\}$
2	t_2	$(2-0{,}3)/(n+0{,}4)$	$\ln(t_2)$	$\ln\{\ln[1/(1-F_2(t)]\}$
3	t_3	$(3-0{,}3)/(n+0{,}4)$	$\ln(t_3)$	$\ln\{\ln[1/(1-F_3(t)]\}$
4	t_4	$(4-0{,}3)/(n+0{,}4)$	$\ln(t_4)$	$\ln\{\ln[1/(1-F_4(t)]\}$
.	.	.	.	
.	.	.	.	
i	t_i	$(i-0{,}3)/(n+0{,}4)$	$\ln(t_i)$	$\ln\{\ln[1/(1-F_i(t)]\}$
.	.	.	.	
n	t_n	$(n-0{,}3)/(n+0{,}4)$	$\ln(t_n)$	$\ln\{\ln[1/(1-F_n(t)]\}$

Un exemple pratique est montré en Annexe E.

I.3 Logiciel du commerce

Des logiciels du commerce sont également disponibles pour analyse et tracé de Weibull.

Annexe J
(informative)

Bases techniques et références

L'Annexe J donne des informations sur l'origine des procédures de l'Article 9 de la présente norme. Les références citées sont toutes listées à l'Article J.5.

J.1 Test d'adéquation

C'est l'essai de Mann-Scheuer-Fertig (1973) dans la forme présentée par Lawless (1982). Les valeurs attendues des ordres de grandeur statistiques des extrêmes normalisés, nécessaires pour le calcul du ℓ_i en 9.5, sont approchées comme le suggère Blom (1958). Il a été mis en évidence que cet essai avait une puissance comparable à l'essai de Shapiro et Brain (1987) et à l'essai de Tiku's tel que décrit par Lawless (1982). Ce dernier est légèrement meilleur que tous les essais de distributions empiriques disponibles. De plus, l'essai de Mann-Scheuer-Fertig peut convenir aux échantillons censurés.

J.2 Estimations du maximum de vraisemblance de β et η

Les équations sont celles communément utilisées pour les échantillons uniques censurés. Actuellement, elles constituent les techniques numériques les plus répandues pour obtenir les paramètres de Weibull. La représentation donnée dans la présente norme est celle de Mann, Schafer and Singpurwalla (1974). Puisque la procédure numérique de la présente norme s'applique seulement aux échantillons de taille supérieure à 10, le biais statistique est faible.

J.3 Intervalles de confiance et limites de confiance plus faibles

L'approche adoptée est celle de Bain et Engelhardt (1981) pour des échantillons complets et celle de Bain et Engelhardt (1986) pour les essais censurés. Ces références ont des coefficients générés par des méthodes de Monte-Carlo et utilisent une approximation asymptotique pour affiner les résultats. Certaines fonctions linéaires et non linéaires ont été adaptées à ces tableaux, éliminant ainsi le besoin de tableaux auxiliaires. Les différences sont dans tous les cas vraiment faibles (~ 1 %).

Une alternative aurait pu être l'utilisation de la méthode conditionnelle de Lawless (1978) mais cette approche, bien que théoriquement plus attirante, aurait conduit à une procédure bien trop complexe, nécessitant une intégration numérique fastidieuse.

L'approche purement asymptotique a été rejetée parce que la procédure nécessite d'être robuste pour les échantillons relativement peu nombreux.

J.4 Précision des procédures normalisées

Les procédures de la présente norme ont été comparées à des résultats publiés similaires et à différentes techniques. Tous les exemples analysés conduisent à la même estimation du maximum de vraisemblance que celle obtenue en suivant la présente norme. Les seules différences résident dans les intervalles de confiance et les limites inférieures. Ce qui suit est un résumé de ces comparaisons.

J.4.1 Bain et Engelhardt (1986)

Puisque c'est l'origine de la procédure normalisée, la nécessité de comparer les résultats peut se poser. L'intérêt de la comparaison réside dans la précision des fonctions d'approximation utilisées dans la présente norme. La comparaison est ci-après:

	Bain & Engelhardt	*Procédure normalisée*
Intervalle de confiance à 90% pour β:	[1,34; 2,73]	[1,34; 2,74]
Intervalle de confiance à 90% pour η:	[70,7; 105,9]	[70; 108]
$R_{0,9}(t$ = 32,46)	0,801	0,800

J.4.2 Lawless (1978)

L'échantillon analysé comporte 28 défaillances pour une taille d'échantillon n = 40. Lawless donne seulement des intervalles de confiance de 90 % pour k et 95 % comme limites inférieures pour B_{10} et pour $R(t = e^{-1})$. Les résultats sont ci-après:

	Lawless	*Procédure normalisée*
Intervalle de confiance à 90% pour β:	[0,783; 1,381]	[0,785; 1,370]
Limite de confiance à 90 % pour B_{10}	0,066	0,074
$R_{0,95}(t$ = 0,368)	0,647	0,644

J.4.3 Meeker et Nelson (1976)

Il s'agit d'une technique asymptotique. L'exemple traité est un échantillon de 96 locomotives, dont 37 sont défaillantes. Le temps T de censure est légèrement supérieur au temps d'apparition de la dernière défaillance. Puisque la taille de l'échantillon est confortable, l'approche asymptotique peut être, dans ce cas, précise. Les auteurs ne donnent qu'un intervalle de confiance de 95 % pour k et puisqu'il y a un intervalle de confiance de 95 % pour $B_{10,}$ on peut déduire la limite inférieure de confiance de 97,5 % pour cette grandeur.

	Meeker & Nelson	*Procédure normalisée*
Intervalle de confiance à 90% pour β:	[1,72; 3,16]	[1,61; 3,04]
Limite de confiance à 97,5 % pour B_{10}	55,4	54,2

J.4.4 Guida (1985)

Ce papier contient des tableaux générés par Monte-Carlo pour obtenir les limites inférieures exactes pour les maximums de vraisemblance estimés de la fiabilité dans des échantillons censurés petits ($n \leq 20$). Certains échantillons suivant la distribution de Weibull et générés de façon aléatoire ont été utilisés pour comparer les limites basses de la fiabilité calculée en accord avec la présente norme et ceux obtenus par Guida. Dans tous les cas, les différences étaient de l'ordre de 1 % ou moins.

J.5 Documents de références

BAIN, L. J. and ENGELHARDT, M. (1981), *Simple Approximate Distributional Results for Confidence and Tolerance Limits for the Weibull Distribution Based on Maximum Likelihood Estimators*, Technometrics, Vol. 23, No. 1, pp. 15-20.

BAIN, L. J. and ENGELHARDT, M. (1986), *Approximate Distributional Results Based on the Maximum Likelihood Estimators for the Weibull Distribution*, Journal of Quality Technology, Vol. 18, No. 3, pp. 174-181.

blom, G. (1958), *Statistical Estimates and Transformed Beta-Variables*, New York, J. Wiley & Sons.

GUIDA, M. (1985), *On the Confidence Limits for Weibull Reliability and Quantiles: The Case of Maximum Likelihood Estimation from Small Size Censored Samples*, Reliability Engineering, Vol. 12, pp. 217-240.

LAWLESS, J. F. (1978), *Confidence Interval Estimation for the Weibull and Extreme Value Distributions*, Technometrics, Vol. 20, No. 4, pp. 355-368.

LAWLESS, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, New York, J. Wiley & Sons.

MANN, N. R., SCHEUER, E. M. and FERTIG, K. W. (1973), *A New Goodness-of-fit test for the Two-parameter Weibull or Extreme Value Distribution*, Commun. Stat., Vol. 2, pp. 383-400.

MANN, N. R., SCHAFER, E. and SINGPURWALLA, N. (1974), *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Lifetime Data*, New York, J. Wiley & Sons.

MEEKER, W. Q. and NELSON, W. (1976), *Weibull Percentile Estimates and Confidence Limits from Singly Censored Data by Maximum Likelihood*, IEEE Trans. on Reliability, Vol. R-25, No. 1, pp. 20-24.

SHAPIRO, S. S. and BRAIN, C. W. (1987), *W-Test for the Weibull Distribution*, Commun. Statist. -Simula., Vol. 16, No. 1, pp. 209-219.

Bibliographie

[1] ABERNETHY, R. B., “The New Weibull Handbook”», 2003, 4th edition.

[2] Defence Standard 00-40, “Reliability and Maintainability”, 2003.

[3] Defence Standard 00-971, “General Specification for Aircraft Gas Turbine Engines”, 1987.

[4] CEI 60300-1, Gestion de la sûreté de fonctionnement – Partie 1: Gestion du programme de sûreté de fonctionnement

[5] CEI 60300-2, Gestion de la sûreté de fonctionnement – Partie 2: Lignes directrices pour la gestion de la sûreté de fonctionnement

[6] CEI 60300-3-1:2003, Gestion de la sûreté de fonctionnement – Partie 3-1: Guide d'application – Techniques d'analyse de la sûreté de fonctionnement – Guide méthodologique

[7] CEI 60300-3-2, Gestion de la sûreté de fonctionnement – Partie 3-2: Guide d'application – Recueil de données de sûreté de fonctionnement dans des conditions d'exploitation

[8] CEI 60300-3-4:2007, Gestion de la sûreté de fonctionnement – Partie 3-4: Guide d'application – Spécification d'exigences de sûreté de fonctionnement

[9] CEI 60605-4:2001, Essai de fiabilité des équipements – Partie 4: Méthodes statistiques de distribution exponentielle – Estimateurs ponctuels, intervalles de confiance, intervalles de prédiction et intervalles de tolérance

[10] CEI 60605-6:2007, Essais de fiabilité des équipements – Partie 6: Tests pour la validité et l’estimation du taux de défaillance constant et de l'intensité de défaillance constante

[11] ISO 11453:1996, Interprétation statistique des données – Tests et intervalles de confiance portant sur les proportions

[12] ISO 2854:1976, Interprétation statistique des données – Techniques d'estimation et tests portant sur des moyennes et des variances

[13] JENSEN, F. and Petersen, N. E., «Burn-In», John Wiley, 1982.

[14] JOHNSON, L.G., «The Statistical Treatment of Fatigue Experiments», Elsevier, 1974.

[15] JOHNSON, N.L., Kotz, S. and BALAKRISHNAN, N., “Continuous Univariate Distributions Volume 1”, 2nd edition, John Wiley, 1994.

[16] LAWLESS, J.F., “Statistical Models and Methods for Lifetime Data”, John Wiley & Sons. 1982

[17] MEEKER, W.Q. and ESCOBAR, L.A., “Statistical Methods for Reliability Data”, John Wiley, 1998.

[18] MISCHKE, C.R., “A Distribution-independent Plotting Rule for Ordered Failures”, ASME Design Engineering Technical Conference, 1979.

[19] MURTHY, Xie & Jiang, “Weibull Models”, John Wiley 2004.

[20] NELSON, W., “Applied Life Data Analysis”, John Wiley, 1982.

[21] NELSON, W., “Accelerated Testing”, John Wiley, 1990.

[22] O’CONNOR, P. D. T., “Practical Reliability Engineering” John Wiley, 2002.

[23] CEI 61703, Expressions mathématiques pour les termes de fiabilité, de disponibilité, de maintenabilité et de logistique de maintenance

[24] ISO/TR 13425:2006, Lignes directrices pour la sélection des méthodes statistiques dans la normalisation et la spécification

____

INTERNATIONAL
ELECTROTECHNICAL
COMMISSION

3, rue de Varembé
PO Box 131
CH-1211 Geneva 20
Switzerland

Tel: + 41 22 919 02 11
Fax: + 41 22 919 03 00
info@iec.ch
www.iec.ch